Analyse et Géométrie
M. Alain CONNES, membre de l'Institut
(Académie des Sciences), professeur

Structures Transverses et Crochets de Rankin-Cohen

1. Algèbres Modulaires

Mon cours cette année est basé sur ma collaboration avec Henri Moscovici et a pour sujet les *formes modulaires et crochets de Rankin-Cohen*, dont on établit le lien avec l'algèbre de Hopf des structures transverses en codimension 1 que nous avions étudiée dans un cours précédent. L'espace noncommutatif qui est le thème du cours est le quotient de l'espace des réseaux de $\mathbb{C}$ par les correspondances de Hecke. Il est décrit par une algèbre dont la construction utilise deux structures sans relations *a priori* sur les formes modulaires, à savoir d'une part la structure d'algèbre pour le produit ponctuel et d'autre part l'action des opérateurs de Hecke. Nous associons à tout groupe de congruence $\Gamma \subset \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ une algèbre produit croisé $\mathcal{A}(\Gamma)$, l' *algèbre modulaire* de niveau Γ. Cette algèbre est une extension de l'anneau des opérateurs de Hecke classiques et de l'algèbre $\mathcal{M}(\Gamma)$ des formes modulaires de niveau Γ. Soit $\mathcal{M}$ l'algèbre des formes modulaires de niveau arbitraire. Les éléments de $\mathcal{A}(\Gamma)$ sont les applications à support fini,

$$F : \Gamma\backslash \mathrm{GL}^+(2,\mathbb{Q}) \to \mathcal{M}\,, \qquad \Gamma\alpha \mapsto F_\alpha \in \mathcal{M}\,,$$

vérifiant la condition de covariance,

$$F_{\alpha\gamma} \;=\; F_\alpha|\gamma\,, \qquad \forall \alpha \in \mathrm{GL}^+(2,\mathbb{Q})\,, \gamma \in \Gamma$$

et le produit est le produit de convolution.

$$(F^1 * F^2)_\alpha \;:=\; \sum_{\beta \in \Gamma\backslash G^+(\mathbb{Q})} F^1_\beta \cdot F^2_{\alpha\beta^{-1}}|\beta$$

Dans le cas le plus simple $\Gamma(1) \;=\; \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$, les éléments de $\mathcal{A}(\Gamma(1))$ sont spécifiés par un nombre fini de formes modulaires $f_N \in \mathcal{M}(\Gamma_0(N))$ de niveau arbitrairement grand. En général on a,

Lemme 1 *Soit $f \in \mathcal{M}$ une forme modulaire, Γ un groupe de congruence. Il existe $F \in \mathcal{A}(\Gamma)$ tel que $F_\alpha = f$ ssi*

$$f|\gamma = f\,, \quad \forall\,\gamma \in \Gamma\,\cap \alpha^{-1}\Gamma\,\alpha\,.$$

L'algèbre $\mathcal{A}(\Gamma)$ agit sur $\mathcal{M}(\Gamma)$, cette action prolonge l'action classique des opérateurs de Hecke. De plus les éléments "paraboliques" forment un idéal bilatère de $\mathcal{A}(\Gamma)$.
L'algèbre $\mathcal{A}(\Gamma)$ admet une interprétation adélique simple comme algèbre réduite du produit croisé de $\mathcal{M}$ par l'action du groupe

$$\mathrm{GL}(2,\mathbb{A})^0 := \{\, g \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{A})\,|\,\mathrm{Det}(g) \in \mathbb{Q}^* \times \mathbb{R}^* \subset \mathrm{GL}(1,\mathbb{A})\}$$

La réduction est associée au projecteur $e_\Gamma \in C^\infty(\mathrm{GL}(2,\mathbb{A})^0)$ correspondant au sous-groupe Γ.

2. Action de l'algèbre de Hopf $\mathcal{H}_1$ sur les Algèbres Modulaires

L' observation qui sert de point de départ à mon cours est la construction d'une action naturelle sur l'algèbre $\mathcal{A}(\Gamma)$ de l'algèbre de Hopf $\mathcal{H}_1$, que nous avions introduite dans un cours précédent, dans un contexte très différent, celui des feuilletages de codimension 1. En tant qu'algèbre $\mathcal{H}_1$ coïncide avec l'algèbre enveloppante de l'algèbre de Lie ayant pour base $\{X, Y, \delta_n\,; n \geq 1\}$ avec les relations

$$[Y,X] = X\,,\ [Y,\delta_n] = n\,\delta_n\,,\ [X,\delta_n] = \delta_{n+1}\,,\ [\delta_k,\delta_\ell] = 0\,, \quad n,k,\ell \geq 1\,,$$

Le coproduit qui donne la structure d'algèbre de Hopf est l'unique homomorphisme d'algèbre $\Delta : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_1$ tel que

$$\begin{aligned} \Delta\,Y &= Y \otimes 1 + 1 \otimes Y\,, \quad \Delta\,\delta_1 = \delta_1 \otimes 1 + 1 \otimes \delta_1\,, \\ \Delta\,X &= X \otimes 1 + 1 \otimes X + \delta_1 \otimes Y\,, \end{aligned}$$

L'action de X sur $\mathcal{A}(\Gamma)$ est donnée par un opérateur classique qui corrige l'opérateur de différentiation par la dérivée logarithmique de la fonction eta de Dedekind $\eta(z)$. Son introduction remonte à Ramanujan, et il est étudié en détail dans le cours au Collège de Don Zagier. L'action de Y est donnée par l'opérateur de graduation par le poids des formes modulaires. Enfin, δ_1

et ses dérivées d'ordre supérieur δ_n agissent par l'intermédiaire de cocycles $\mu_{n,\alpha}$ du groupe $\mathrm{GL}^+(2,\mathbb{Q})$ à valeurs dans les formes modulaires et définis par

$$\mu_{n,\,\alpha} \,:=\, X^{n-1}(\mu_\alpha)\,, \quad \forall n \in \mathbb{N}\,.$$

$$\mu_\alpha\,(z) \;=\; \frac{1}{12\pi i}\,\frac{d}{dz}\log\frac{\Delta|\alpha}{\Delta} \;=\; \frac{1}{2\pi i}\,\frac{d}{dz}\log\frac{\eta^4|\alpha}{\eta^4}\,.$$

L'action des générateurs de l'algèbre de Hopf $\mathcal{H}_1$ sur l'algèbre modulaire $\mathcal{A}(\Gamma)$ est donnée par les opérateurs suivants

$$\begin{array}{lcll} Y(F)_\alpha & := & Y(F_\alpha)\,, & \quad \forall\, F \in \mathcal{A}(\Gamma)\,, \alpha \in \mathrm{GL}^+(2,\mathbb{Q})\,, \\ X(F)_\alpha & := & X(F_\alpha)\,, & \\ \delta_n(F)_\alpha & := & \mu_{n,\alpha}\cdot F_\alpha\,, & \end{array}$$

Théorème 1 *Soit Γ un groupe de congruence.*
Les formules ci-dessus définissent une action (de Hopf) de l'algèbre de Hopf $\mathcal{H}_1$ sur l'algèbre $\mathcal{A}(\Gamma)$.

Le résultat principal du cours est la compréhension complète de cette action de $\mathcal{H}_1$, vue comme symétrie de l'espace quotient associé à l'action des correspondances de Hecke sur l'espace des réseaux. On utilise l'analogie suivante entre l'action des opérateurs de Hecke sur les formes modulaires et l'action d'un sous-groupe discret Γ de $\mathrm{Diff}(S^1)$ sur les fonctions polynomiales sur le fibré $J^1_+(S^1)$ des jets d'ordre 1,

$$\theta(s) = \theta + s\,\theta_1 + \cdots\,, \qquad \theta_1 > 0\,,$$

sur S^1. Le rôle de la variable angulaire $\theta \in \mathbb{R}/2\,\pi\,\mathbb{Z}$ est tenu par l'intégrale de Eichler la plus simple, à savoir la primitive $Z \in \mathbb{C}/\Lambda$ de la forme différentielle holomorphe $\frac{2\pi i}{6}\,\eta^4\,dz$ sur la courbe elliptique $X'(1) = \Gamma'(1)\backslash H^*$, où $\Gamma'(1)$ est le sous-groupe des commutateurs de $\Gamma(1)$. Le réseau $2\,\pi\,\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ est remplacé par le réseau équilatéral $\Lambda \subset \mathbb{C}$ des périodes de Z. Le rôle du cercle

$$e^{i\theta} \,=\, \cos\theta \,+\, i\,\sin\theta\,, \qquad x^2 \,+\, y^2 \,=\, 1$$

est tenu par la courbe de genre 1, $X'(1) \sim \mathbb{C}/\Lambda$ de paramétrisation (et équation de Weierstrass)

$$(\wp_\Lambda(Z),\, \wp'_\Lambda(Z)) \,=\, \left(\sqrt[3]{j},\, \frac{-2E_6}{\eta^{12}}\right), \qquad y^2 \,=\, 4\,(x^3 \,-\, 1728)$$

avec les notations traditionnelles. Le rôle des difféomorphismes $\phi(\theta)$ est tenu par les transformations de Hecke $Z|_0\,\alpha$, et celui du Jacobien $\phi'(\theta)$ par $J(\alpha) = \frac{dZ|_0\,\alpha}{dZ}$. Les cocycles $\mu_{n,\alpha}$ qui définissent l'action de δ_n sont semblables au cas des difféomorphismes et donnés par $\left(\frac{d}{dZ}\right)^n \log J(\alpha)$ qui remplace $\left(\frac{d}{d\theta}\right)^n \log \phi'(\theta)$.

3. Cohomologie Cyclique de l'algèbre de Hopf $\mathcal{H}_1$

La cohomologie cyclique des algèbres de Hopf a été introduite dans un cours antérieur, elle généralise la cohomologie des groupes et des algèbres de Lie. Nous construisons un isomorphisme κ_1^* de la cohomologie cyclique périodique de l'algèbre de Hopf $\mathcal{H}_1$ avec la cohomologie de Gelfand-Fuchs en dimension un. Nous décrivons les trois cocycles de base et leur signification dans le cas des difféomorphismes, avant de calculer leur action sur les formes modulaires. Les trois cocycles de base sont,

Cocycle de Godbillon-Vey
Sa classe est représentée par δ_1 qui est un élément primitif de l'algèbre de Hopf $\mathcal{H}_1$, i.e. vérifie

$$\Delta\,\delta_1 = \delta_1 \otimes 1 + 1 \otimes \delta_1$$

et il est cyclique, i.e. vérifie $B(\delta_1) = 0$ où B est l'opérateur de bord en cohomologie cyclique dont la définition utilise l'antipode, le produit et le coproduit. On montre que la classe de δ_1

$$[\delta_1] \,\in\, HC^1_{\mathrm{Hopf}}\,(\mathcal{H}_1)\,.$$

est le générateur de $PHC^{\mathrm{odd}}_{\mathrm{Hopf}}\,(\mathcal{H}_1)$ et correspond à la classe de Godbillon-Vey dans l'isomorphisme κ_1^* avec la cohomologie de Gelfand-Fuchs.

Dérivée Schwarzienne
L'élément $\delta_2' := \delta_2 - \frac{1}{2}\delta_1^2 \,\in \mathcal{H}_1$ est un cocycle cyclique de Hopf, dont l'action sur un produit croisé $\mathcal{A}_\Gamma = C_c^\infty(J^1_+(S^1)) \rtimes \Gamma$ est donnée par la dérivée

Schwarzienne

$$\delta_2'(fU_\varphi^*) = \theta_1^2\,\{\varphi(\theta)\,;\theta\}\,fU_\varphi^*$$

et dont la classe

$$[\delta_2'] \,\in\, HC^1_{\mathrm{Hopf}}\,(\mathcal{H}_1)$$

est égale à $B(c)$, où c est le 2-cocycle de Hochschild

$$c \,:=\, \delta_1 \otimes X + \frac{1}{2}\,\delta_1^2 \otimes Y\,.$$

Classe Fondamentale
Le générateur de la cohomologie paire $PHC^{\mathrm{even}}_{\mathrm{Hopf}}(\mathcal{H}_1)$ est la classe du 2-cocycle cyclique

$$F := X \otimes Y - Y \otimes X - \delta_1\,Y \otimes Y\,,$$

qui dans le cas des feuilletages représente la classe fondamentale transverse.

4. Action de δ_2' et structure projective

Nous montrons que dans l'action ci-dessus de l'algèbre de Hopf $\mathcal{H}_1$, l'élément δ_2' est représenté par une dérivation intérieure, implémentée par la série d'Eisenstein de poids 4 et niveau 1, notée ici ω_4.

$$\omega_4 \,=\, -\frac{E_4}{72}$$

où

$$E_4(q) := 1 + 240\,\sum_1^\infty n^3 \frac{q^n}{1-q^n}$$

Théorème 2 *Soit Γ un groupe de congruence. La dérivation $\delta_2' = \delta_2 - \frac{1}{2}\delta_1^2$ est intérieure et implémentée par $\omega_4 \in \mathcal{A}(\Gamma)$.*

La structure projective standard de S^1, correspondant à la coordonnée $t = \tan(\frac{\theta}{2})$, et qui dans la coordonnée θ est donnée par la différentielle quadratique

$$\rho \,:=\, \{t\,;\theta\}\,d\theta^2 \,=\, \frac{1}{2}\,d\theta^2\,,$$

a pour contrepartie dans le cas modulaire la structure projective de $X'(1)$ donnée par la différentielle quadratique

$$\varpi' = \frac{x\,dx^2}{2\,y^2} = \frac{x\,dx^2}{8\,(x^3-1728)}\,.$$

L'on peut aussi la calculer sur le revêtement d'ordre 12 de $X'(1)$ donné par la courbe elliptique modulaire $X(6) \cong X_0(36)$ d'équation de Weierstrass $y^2 = x^3+1$, ce qui donne la différentielle quadratique

$$\varpi := \{z\,;Z\}\,dZ^2 = \frac{(x^3+4)(x^9+228\,x^6+48\,x^3+64)}{8\,(x(x^3-8)(x^3+1))^2}\,dx^2\,,$$

Cette relation entre Z et ϖ est semblable à la relation classique entre l'invariant j et la forme modulaire E_4 dans le cas de genre 0.

Nous montrons ensuite comment comprendre l'ambiguïté évidente de la construction ci-dessus résultant du choix particulier de la dérivation X (i.e. de la forme η^4). Tout autre choix correspond en effet à perturber l'action de $\mathcal{H}_1$ par un 1-cocycle. Nous montrons que l'on ne peut perturber cette action pour annuler l'image de δ_2' et que la liberté que l'on a en modifiant l'action de $\mathcal{H}_1$ par un 1-cocycle modifie l'action de X sur les formes modulaires ainsi que ω_4 par la même formule que dans l'approche de Don Zagier aux crochets de Rankin-Cohen.

5. Action de F et crochets de Rankin-Cohen

Soit Γ un groupe de congruence. L'image du générateur $[F] \in HC^2_{\mathrm{Hopf}}(\mathcal{H}_1)$ par l'application caractéristique de la cohomologie cyclique de $\mathcal{H}_1$ vers la cohomologie de Hochschild de $\mathcal{A}(\Gamma)$,

$$\chi(F)(a_1,a_2) := X(a_1)Y(a_2) - Y(a_1)X(a_2) - \delta_1(Y(a_1))Y(a_2)\,,$$

donne l'extension naturelle à $\mathcal{A}(\Gamma)$ du premier crochet de Rankin-Cohen $\{\,\cdot\,,\,\cdot\}_1$. Nous montrons en fait que tous les crochets de Rankin-Cohen ont une extension naturelle à $\mathcal{A}(\Gamma)$ et que cette extension est un cas particulier d'une construction générale pour les actions "projectives" de l'algèbre de Hopf $\mathcal{H}_1$. Nous utilisons de manière cruciale l'associativité des algèbres modulaires (section 1) pour montrer l'associativité des déformations définies en toute généralité.

Une action de l'algèbre de Hopf $\mathcal{H}_1$ sur une algèbre $\mathcal{A}$ est dite *projective* quand la dérivation δ_2' est intérieure

$$\delta_2'(a) = [\Omega,\ a]\,, \quad \forall a \in \mathcal{A}$$

avec

$$\delta_k(\Omega) = \ 0\,,\ \forall k \in \mathbb{N}$$

Nous dirons que l'algèbre $\mathcal{A}$ est alors munie d'une *structure projective.*

Etant donnés deux opérateurs Z et Θ agissant linéairement sur $\mathcal{A}$ et vérifiant

$$[Y,\, Z] = Z\,, \quad [Y,\, \Theta] = 2\Theta$$

on définit une suite d'opérateurs, $C_0 := 1$, $C_1 := Z$,

$$C_{n+1} := Z\, C_n - n\, \Theta\, (Y - \frac{n-1}{2}) C_{n-1}$$

et la série,

$$\Phi(Z,\Theta)(s) := \sum \frac{s^n\, C_n}{n!}\, \Gamma(2Y+n)^{-1}$$

Par construction Φ est l'unique solution de l'équation différentielle

$$s(\frac{d}{ds})^2\Phi - 2(Y-1)\, \frac{d}{ds}\Phi + Z\,\Phi - \frac{s}{2}\,\Theta\,\Phi = 0$$

telle que,

$$\Phi(0) = \ \Gamma(2Y)^{-1}\,, \quad \frac{d}{ds}\Phi(0) = Z\,\Gamma(2Y+1)^{-1}\,.$$

Lemme 2 *Soit μ un opérateur dans $\mathcal{A}$ tel que*

$$[\Theta,\, \mu] = 0\,, \quad [Y,\, \mu] = \mu\,, \quad [[Z,\, \mu],\, \mu] = 0$$

alors

$$\Phi(Z +\ \mu\, Y,\ \Theta +\ [Z,\, \mu]\ +\ \frac{\mu^2}{2})(s) = \ e^{\frac{s\,\mu}{2}}\, \Phi(Z,\Theta)(s)$$

La formule générale pour RC_n est obtenue en développant en puissances de s le produit
$$\Phi(S(X),\Omega^o)(s)(a)\,\Phi(X,\Omega)(s)(b)$$
où Ω (resp. Ω^o) désigne la multiplication à gauche (resp. à droite) par Ω, et $S(X)$ est l'antipode de X
$$S(X) = -X + \delta_1\, Y\,.$$
Cela donne une formule de la forme,
$$RC_n(a,b) := \sum_{k=0}^{n} \frac{A_k}{k!}\,(2Y+k)_{n-k}(a)\,\frac{B_{n-k}}{(n-k)!}\,(2Y+n-k)_k(b)$$
où $(\alpha)_k := \alpha\,(\alpha+1)....(\alpha+k-1)$.

Théorème 3 *Le foncteur RC_* associe à toute algèbre $\mathcal{A}$ munie d'une structure projective une famille de déformations formelles de $\mathcal{A}$, en algèbres associatives, dont le produit est donné par la formule*
$$a *_t b := \sum t^n RC_n(a,b)$$

Plus généralement, comme dans l'article de P. Cohen, Y. Manin, and D. Zagier "Automorphic pseudodifferential operators", pour tout $\kappa \in \mathbb{C}$ le produit
$$a *_t^{\kappa} b \;:=\; \sum t^n\, RC_n\left(\mathbf{t}_n^{\kappa}(Y\otimes 1, 1\otimes Y)(a\otimes b)\right)\,,$$
où
$$\mathbf{t}_n^{\kappa}(x,y) := (-\frac{1}{4})^n \sum_j \binom{n}{2j} \frac{\binom{-\frac{1}{2}}{j}\binom{\kappa-\frac{3}{2}}{j}\binom{\frac{1}{2}-\kappa}{j}}{\binom{-x-\frac{1}{2}}{j}\binom{-y-\frac{1}{2}}{j}\binom{n+x+y-\frac{3}{2}}{j}}$$
donne une déformation associative.

Théorème 4 *Le foncteur RC_* appliqué aux algèbres modulaires $\mathcal{A}(\Gamma)$ donne l'algèbre réduite du produit croisé de l'algèbre des formes modulaires dotée des crochets de Rankin-Cohen par l'action du groupe* $\mathrm{GL}(2,\mathbb{A}_f)^0$.

Pour terminer, on calcule l'image du cocycle δ_1 (i. e. de Godbillon-Vey) dans l'action ci-dessus de $\mathcal{H}_1$ sur $\mathcal{A}(\Gamma)$ en terme de la classe d'Euler de GL(2).

Conférences

Septembre 2001, 3 cours de 1 heure au Schrödinger Institute (Vienne).

Septembre 2001, 3 cours de 1 heure au CIRM (Luminy).

Septembre 2001, 2 conférences à Stockholm pour le prix Crafoord.

Octobre 2001, 5 cours de 1h 30 a Oberwolfach (session spéciale pour les étudiants sur la Géométrie Noncommutative).

Decembre 2001, 3 cours de 1h a l'IHP a Paris.

Mars 2002, 1 cours de 1 heure à Oberwolfach.

Juin 2002, 1 conférence à Paris (en l'honneur de Pierre Cartier).

Juillet 2002, 1 cours de 1 heure à Munster.

Septembre 2002, 2 cours de 1 heure au Schrödinger Institute (Vienne), Quantum group Symmetries and the Local Index Formula for $SU_q(2)$.

Octobre 2002, Séminaire Bourbaphy, Symétries Galoisiennes et renormalisation.

Octobre 2002, 1 conférence à Turin, à l'occasion du prix Peano pour "Triangle de Pensées".

Avril 2003, 1 conférence à Banff (Rencontre de Géométrie Noncommutative).

Mai 2003, 6 conférences à Vanderbilt University (Shanks lectures).

Mai 2003, 1 conférence à Orsay (Colloquium).

Juin 2003, 1 conférence à Bonn (Algèbres de Hopf et crochets de Rankin-Cohen).

Juin 2003, Séminaire Bourbaki, Nombres de Betti L^2 et facteurs de type II_1. (selon Gaboriau et Popa)

Juin 2003, 1 conférence à Bruxelles (Structures Transverses et crochets de Rankin-Cohen).

Juin 2003, 1 conférence à Paris (en l'honneur de Louis Boutet de Monvel).

Publications

A. Connes, Cyclic cohomology, Quantum group Symmetries and the Local Index Formula for $SU_q(2)$.(2002), Math QA/0209142.

A. Connes et M. Dubois-Violette, Noncommutative finite-dimensional manifolds I, spherical manifolds and related examples. Math QA/0107070 (2001).

A. Connes, Symétries Galoisiennes et renormalisation. Séminaire Bourbaphy Octobre 2002.

A. Connes et M. Dubois-Violette, Yang-Mills Algebra. Math QA/0206205 (2002).

A. Connes et H. Moscovici, Modular Hecke Algebras and their Hopf Symmetry. (2003), Math QA/0301089.

A. Connes et H. Moscovici, Rankin-Cohen Brackets and the Hopf Algebra of Transverse Geometry. (2003), Math QA/0304316.