Analyse et géométrie
M. Alain CONNES, membre de l Institut
(Académie des Sciences), professeur

Formules explicites, formules de trace
et réalisation spectrale des zéros de la fonction zéta

1. Introduction J'avais mis en évidence dans mon cours 96-97 le rôle de l'espace des classes d'adèles sur un corps global k dans l'interprétation spectrale des zéros des fonctions L. L'interprétation des formules explicites de Riemann-Weil comme formule de trace restait au niveau formel car les opérateurs impliqués n'étaient traçables que dans le troisième terme $\mathcal{H}$ de la suite exacte d'espaces de Hilbert,

$$0 \to \mathcal{H}_0 \to \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H} \to 0 \,, \tag{1}$$

où $\mathcal{H}_0 = L^2_\delta(X)_0$ est un espace de fonctions de carré sommable sur X vérifiant les 2 conditions linéaires

$$f(0) = 0 \;, \quad \int f \, dx = 0 \,, \tag{2}$$

où $\mathcal{H}_1 = L^2_\delta(C_k)$ est la représentation régulière du groupe C_k des classes d'idèles et où C_k agit sur X par multiplication.

La suite exacte (1) est analogue à celle des formes différentielles paires et impaires sur une surface de Riemann compacte Σ, où $\mathcal{H}_0$ désigne l'espace de Sobolev des formes de degré pair orthogonales aux formes harmoniques et $\mathcal{H}_1$ l'espace des formes de degré 1 de carré intégrable, la flèche de $\mathcal{H}_0$ dans $\mathcal{H}_1$ étant la somme $d + d^*$ où d^* est l'adjoint de la différentielle de de Rham d.

La formule de trace énoncée au niveau formel dans 96-97 est l'analogue de la formule de Lefchetz, mais cette analogie formelle se heurte aux problèmes suivants:

(α) La suite exacte (1) dépend d'un exposant de Sobolev δ et les zéros des fonctions L n'apparaissent dans $\mathcal{H}$ que si $\delta > 1$. La valeur δ donne alors une borne à priori sur les multiplicités, de sorte qu'aucune valeur naturelle de δ ne peut être fixée.

(β) La condition de transversalité dans la formule de Lefchetz de Atiyah-Bott n'autorise que des fonctions test h sur le groupe C_k qui s'annulent au voisinage de 1.

(γ) L'espace X étant non séparé le décompte des orbites périodiques est rendu délicat par l'existence de points dont l'isotropie n'est pas un sous-groupe fermé de C_k.

(δ) Le point $0 \in X$ est fixe par l'action de C_k et il faut montrer qu'il ne contribue pas à la formule de trace.

Tous ces problèmes sont déjà présents, ainsi que l'absence de traçabilité de l'opérateur

$$U(h) = \int_{C_k} h(u)\, U(u)\, d^*u \tag{3}$$

(où $h \in \mathcal{S}(C_k)$ et $(U(u)\,\xi)(x) = \xi(u^{-1}x)$, $\forall x \in X, u \in C_k$)

dans le cadre semi-local suivant: Soit S un ensemble fini de places du corps global k et soit $O_S^* \subset k^*$ le sous-groupe,

$$O_S^* = \{q \in k\ ; \quad |q_v| = 1 \qquad \forall\, v \notin S\}\,. \tag{4}$$

Soient alors $A_S = \prod_{v \in S} k_v$ et $X_S = A_S / O_S^*$ le quotient de A_S par l'action de O_S^* par multiplication. Le groupe $C_S = \left(\prod_{v \in S} k_v^*\right) / O_S^*$ agit sur X_S par multiplication.

Les résultats principaux de mon cours sont

(A) La résolution des problèmes $(\alpha)(\beta)(\gamma)(\delta)$ ci-dessus dans le cas semi-local.

(B) La démonstration de l'implication FT $\Rightarrow$ RH où FT désigne la formule de trace globale et RH l'hypothèse de Riemann pour les fonctions L de Hecke.

Seule la version semi-locale de la formule de trace est démontrée.

Nous avons donné deux démonstrations de la formule de trace semi-locale. La première est analogue à celle de la formule de trace de Selberg. La deuxième s'appuie sur le calcul différentiel quantique introduit dans un cours anterieur.

La démonstration de l'implication FT $\Rightarrow$ RH consiste à prouver la positivité de la distribution de Weil sur le groupe C_k comme limite faible de distributions de type positif.

2. Formule de trace semi-locale

Soient k un corps global et S un ensemble fini de places de k, contenant toutes les places infinies. Soit O_S^* le groupe des S-unités défini ci dessus. Il est cocompact dans J_S^1 où

$$J_S = \prod_{v\in S} k_v^* \tag{5}$$

et,

$$J_S^1 = \{j \in J_S, |j| = 1\}. \tag{6}$$

Le groupe quotient $C_S = J_S/O_S^*$ joue le même role que C_k, et agit sur le quotient X_S de $A_S = \prod_{v\in S} k_v$ par O_S^*.

Pour prendre un exemple simple, on considere $k = \mathbb{Q}$, alors que S est l'ensemble des trois places 2, 3, et ∞. On vérifie dans cet exemple que la topologie de X_S n'est pas de type I car le groupe $O_S^* = \{\pm 2^n 3^m;\, n, m \in \mathbb{Z}\}$ agit ergodiquement sur $\{0\} \times \mathbb{R} \subset A_S$.

On normalise la mesure de Haar $d^*\lambda$ de C_S par

$$\int_{|\lambda|\in[1,\Lambda]} d^*\lambda \sim \log\Lambda \qquad \text{quand } \Lambda \to \infty\,, \tag{7}$$

et la mesure de Haar $d^*\lambda$ de J_S de telle sorte qu'elle coincide avec celle de C_S sur un domaine fundamental D pour l'action de O_S^* sur J_S.

Soit $L^2(X_S)$ l'espace de Hilbert séparé complété de l'espace de Bruhat-Schwartz $\mathcal{S}(A_S)$ pour la structure pre-hilbertienne donnée par

$$\|f\|^2 = \int \Big| \sum_{q\in O_S^*} f(qx)\Big|^2 |x|\, d^*x \tag{8}$$

où l'intégration est effectuée sur un domaine fondamental D pour l'action de O_S^* sur J_S. L'on montre que l'intégrale est convergente en estimant

$$\int_{u_i\geq 0, \sum u_i = -Log|x|} \prod du_i. \tag{9}$$

Soit $U(g)$ l'opérateur

$$(U(g)\,\xi)(x) = \xi(g^{-1}\,x) \qquad \forall\, x \in A_S \tag{10}$$

La même formule, avec $x \in X_S$, définit son action sur $L^2(X_S)$. Soit $h \in \mathcal{S}(C_S)$ une fonction support compact, $U(h) = \int h(g)U(g)dg$ l'opérateur correspondant dans $L^2(X_S)$.

La transformation de Fourier F sur $\mathcal{S}(A_S)$ se prolonge en un opérateur unitaire sur l'espace de Hilbert $L^2(X_S)$, on a en effet

Lemme 1. *a) Pour tous $f_i \in \mathcal{S}(A_S)$ la série $\sum_{O_S^*} \langle f_1, U(q)\, f_2 \rangle_A$ de produits scalaires dans $L^2(A_S)$ converge géomètriquement sur le groupe abélien O_S^*. De plus, sa somme est égale au produit scalaire de f_1 et f_2 dans l'espace de Hilbert $L^2(X_S)$.*

b) Soit $\alpha = \prod \alpha_v$ un caractère du groupe additif A_S et F la transformation de Fourier correspondante. L'application $f \to F(f)$, $f \in \mathcal{S}(A_S)$ se prolonge uniquement en un opérateur unitaire dans l'espace de Hilbert $L^2(X_S)$.

Soit alors P_Λ le projecteur orthogonal sur le sous-espace,

$$P_\Lambda = \{\xi \in L^2(X_S)\,;\ \xi(x) = 0 \qquad \forall x\ ,\ |x| > \Lambda\}\,. \tag{11}$$

Par construction P_Λ est l'opérateur de multiplication par la fonction ρ_Λ, où $\rho_\Lambda(x) = 1$ si $|x| \leq \Lambda$, et $\rho(x) = 0$ si $|x| > \Lambda$. Cela donne un "cutoff" infrarouge et pour obtenir un "cutoff" ultraviolet on utilise $\widehat{P}_\Lambda = F P_\Lambda F^{-1}$ où F désigne la transformation de Fourier (Lemme 1) qui dépend du choix du caractère $\alpha = \prod \alpha_v$. Soit

$$R_\Lambda = \widehat{P}_\Lambda\, P_\Lambda\,. \tag{12}$$

Le résultat principal est le suivant

Théorème 2. *Soient A_S et $\alpha = \prod \alpha_v$ comme ci dessus. Soit $h \in \mathcal{S}(C_S)$ une fonction à support compact. Alors quand $\Lambda \to \infty$, on a*

$$\mathrm{Trace}\,(R_\Lambda\, U(h)) = 2h(1) \log' \Lambda + \sum_{v \in S} \int'_{k_v^*} \frac{h(u^{-1})}{|1-u|}\, d^*u + o(1)$$

où $2\log' \Lambda = \int_{\lambda \in C_S,\, |\lambda| \in [\Lambda^{-1}, \Lambda]} d^*\lambda$, chaque k_v^* est plongé dans C_S par $u \to (1, 1, ..., u, ..., 1)$ et où la partie finie $\int'$ est uniquement déterminée par l'unique distribution sur k_v qui coincide avec$\frac{du}{|1-u|}$ pour $u \neq 1$ et dont la transformée de Fourier relative à α_v s'annule en 1.

Soit G un groupe modulé. L'algèbre $\mathcal{A}$ de convolution des fonctions sur G est munie d'un calcul differentiel quantique canonique en considérant sa representation réguliere dans $L^2(G)$ et l'opérateur H de multiplication par le signe de $Log(|g|)$.

On pose alors

$$\text{(13)} \qquad đ\, h = [H, h] \qquad \forall\, h \in \mathcal{A}\,.$$

Prenons alors $G = C_k$.

On démontre que $R_\Lambda\, U(h)$ est unitairement équivalent à un opérateur, agissant dans $L^2(C_S)$, et ayant la forme suivante

$$\text{(14)} \qquad P_{[1,\Lambda^2]}\, \widetilde{h} + \frac{1}{2}\, P_{[0,\Lambda^2]}\, U^{-1}\, (đ\, U)\, \widetilde{h}$$

où pour $a, b \in \mathbb{R}_+$, $P_{[a,b]}$ désigne le projecteur orthogonal donné, la multiplication par la fonction caractéristique de

$$\text{(15)} \qquad \{g \in C_S\ ;\ |g| \in [a,b]\}\,,$$

où $\widetilde{h}(g) = |g|^{-1/2}\, h(g^{-1}) \quad \forall\, g \in C_S$ et où U est un multiplicateur unitaire de $\mathcal{A}$ de la forme $U = \prod_{v \in S} U_v$.

3. La Formule de trace globale

Le groupe abélien A des adèles de k est identifié à son dual de Pontrjagin par l'accouplement

$$\text{(16)} \qquad \langle a, b \rangle = \alpha(ab)$$

ou $\alpha : A \to U(1)$ est un caractère non trivial qui s'annule sur $k \subset A$. Deux tels caractères α et $\alpha^{'}$ sont reliés par k^*

$$\text{(17)} \qquad \alpha^{'}(a) = \alpha(qa) \quad \forall a \in A\,.$$

Il en résulte que les transformations de Fourier correspondantes sur A sont reliées par

$$\text{(18)} \qquad \hat{f}^{'} = \hat{f}_q\,.$$

Ceci est une raison supplémentaire pour diviser par les fonctions de la forme $f - f_q$, i.e.,de considerer l'espace quotient X.

Commenons par le cas où k est de caracteristique positive.

Soit S_0 un ensemble fini de places de k, tel que pour tout $S \supset S_0$ on ait $mod(C_S) = mod(C_k) = q^{\mathbb{Z}}$ et que tout domaine fondamental D pour l' action de O_S^* sur J_S, le produit $D \times \prod R_v^*$ soit un domaine fondamental pour l'action de k^* sur J_k.
Les projecteurs $\widehat{P}_\Lambda$ et P_Λ commutent avec la decomposition de $L^2(X_S)$ en somme directe, indexée par les caractères χ_0 of $C_{S,1}$,

$$L^2_{\chi_0} = \{\xi \in L^2(X_S)\,;\, \xi(a^{-1}x) = \chi_0(a)\,\xi(x),\ \ \forall\, x \in X_S\,, a \in C_{S,1}\} \tag{19}$$

Lemme 3. *Soit χ_0 un caractère de $C_{S,1}$. Alors pour Λ assez grand $\widehat{P}_\Lambda$ et P_Λ commutent dans l'espace de Hilbert $L^2_{\chi_0}$.*

On obtient alors le corollaire suivant du théorème 2 dans le cas de caracteristique positive

Corollaire 4. *Soit Q_Λ le projecteur orthogonal sur le sous-espace de $L^2(X_S)$ engendré par les $f \in \mathcal{S}(A_S)$ tels que $f(x)$ et $\widehat{f}(x)$ s'annulent pour $|x| > \Lambda$. Soit $h \in \mathcal{S}(C_S)$ une fonction à support compact. Alors quand $\Lambda \to \infty$, on a*

$$\text{Trace}\,(Q_\Lambda\, U(h)) = 2h(1)\log' \Lambda + \sum_{v \in S} \int'_{k_v^*} \frac{h(u^{-1})}{|1-u|}\, d^*u + o(1)$$

ou $2\log' \Lambda = \int_{\lambda \in C_S,\, |\lambda| \in [\Lambda^{-1}, \Lambda]} d^*\lambda$*,et les notations sont celles du théorème 2.*

La démonstration du lemme montre en fait que les sous-espaces B_Λ se stabilisent tres rapidement, et que l'application naturelle $\xi \to \xi \otimes 1_R$ de $L^2(X_S)$ vers $L^2(X'_S)$ pour $S \subset S'$ envoie B_Λ^S surjectivement sur $B_\Lambda^{S'}$.

Passons au cas global. On désigne par $L^2(X)$ l'espace de Hilbert $L^2_\delta(X)$ du cours 96-97 pour la valeur triviale $\delta = 0$. Soit de plus Q_Λ le projecteur orthogonal sur le sous-espace B_Λ de $L^2(X)$ engendré pr les $f \in \mathcal{S}(A)$ qui s'annulent ainsi que leur transformée de Fourier pour $|x| > \Lambda$. La démonstration du lemme montre que pour S et Λ assez grands, l'application $\xi \to \xi \otimes 1_R$ de $L^2(X_S)_\chi$ dans $L^2(X)_\chi$ envoie B_Λ^S surjectivement sur B_Λ.

la formule de trace globale est alors

$$\text{Trace}\,(Q_\Lambda\, U(h)) = 2h(1)\log' \Lambda + \sum_{v} \int'_{k_v^*} \frac{h(u^{-1})}{|1-u|}\, d^*u + o(1) \tag{20}$$

avec les notations ci-dessus.

Théorème 5. *Soient k un corps global de carctéristique non-nulle et Q_Λ le projecteur orthogonal sur le sous-espace de $L^2(X)$ engendré par les $f \in \mathcal{S}(A)$*

tels que $f(x)$ et $\widehat{f}(x)$ s'annulent pour $|x| > \Lambda$. Soit $h \in \mathcal{S}(C_k)$ une fonction support compact. Les conditions suivantes sont equivalentes:

a) Quand $\Lambda \to \infty$, on a

$$\mathrm{Trace}\,(Q_\Lambda\, U(h)) = 2h(1)\log' \Lambda + \sum_v \int'_{k_v^*} \frac{h(u^{-1})}{|1-u|}\, d^*u + o(1)\,;$$

b) Toutes les fonctions L sur k satisfont l' Hypothèse de Riemann.

Si k est un corps global de caractéristique nulle on n'a plus la commutation des projecteurs P_Λ et $\widehat{P}_\Lambda$ à cause des places archimédiennes. Pour résoudre ce problème on se concentre sur le cas de la place réelle. On a alors les deux projecteurs orthogonaux P_Λ et $\widehat{P}_\Lambda$ dans $L^2(\mathbb{R})$, avec $\widehat{P}_\Lambda = F\, P_\Lambda\, F^{-1}$ pour la transformation de Fourier associée au caractère $x \to \exp(ix)$ de $\mathbb{R}$. Le point clef, du à Landau, Pollack and Slepian est la commutation de P_Λ et $\widehat{P}_\Lambda$ avec l'opérateur différentiel du second ordre,

$$\Delta_\Lambda = -\partial\,(\Lambda^2 - x^2)\,\partial + \Lambda^2\, x^2\,. \tag{21}$$

Plus précisément on démontre,

Lemme 6. *L'opérateur Δ_Λ défini sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est symétrique, ses indices de défaut sont tous deux égaux à quatre et il admet une unique extension autoadjointe qui commute à la fois avec P_Λ et $\widehat{P}_\Lambda$.*

En posant $U = 2\,P_\Lambda - 1$, $V = 2\,\widehat{P}_\Lambda - 1$ on obtient une représentation du groupe produit libre de deux groupes $\mathbb{Z}/2\,\mathbb{Z}$ à 2 éléments, c'est-à-dire du groupe dihedral. Les représentations irréductibles de ce groupe sont indéxées par les orbites de l'involution $z \to \overline{z}$ dans le dual de Pontrjagin $U(1) = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$ du groupe $\mathbb{Z}$.

La décomposition en somme directe de représentations irréductibles de la représentation π_Λ associée à $(P_\Lambda, \widehat{P}_\Lambda)$ s'obtient en diagonalisant l'opérateur $P_\Lambda\, \widehat{P}_\Lambda\, P_\Lambda$ dans $L^2([-\Lambda, \Lambda])$ et l'on a,

(22) Les valeurs propres de $P_\Lambda\, \widehat{P}_\Lambda\, P_\Lambda$ sont simples et de la forme

$$1 > \lambda_0 > \lambda_1 \ldots > \lambda_n > \lambda_{n+1}\ , \qquad \lambda_n \to 0 \quad n \to \infty\,.$$

(23) Le vecteur propre de $P_\Lambda\, \widehat{P}_\Lambda\, P_\Lambda$ associé à λ_n est la n-ième fonction sphéroidale, i.e. la n-ième fonction propre de l'opérateur Δ_Λ restreint à l'intervalle $L^2([-\Lambda, \Lambda])$.

J'ai passé un temps considérable dans le cours à décrire les propriétés qualitatives connues des fonctions sphéroidales.

J'ai montré en particulier que pour n fixe et $\Lambda \to \infty$ on a

$$\Psi_n(\Lambda) \to D_n \tag{24}$$

où D_n est la n-ième fonction de Hermite-Weber.

La démonstration existant dans la littérature, due à Sips, était erronnée.

Le comportement des valeurs propres $\lambda_n(\Lambda)$ fait apparaître un régime de transition entre les valeurs $\lambda_n(\Lambda)$ égales à 1 à l'ordre de Λ^{-N} pour tout N lorsque

$$n \ll \frac{4\,\Lambda^2}{2\,\pi} \tag{25}$$

et des valeurs de $\lambda_n(\Lambda)$ égales à 0 à l'ordre de Λ^{-N} pour tout N lorsque,

$$n \gg \frac{4\,\Lambda^2}{2\,\pi}\,. \tag{26}$$

La taille de l'intervalle de transition est de l'ordre de $\log \Lambda$ et j'ai montré que les vecteurs propres correspondants donnent une contribution négligeable à l'expression,

$$\mathrm{Trace}\,(Q_\Lambda\, U(h))\,. \tag{27}$$

Ceci permet d'obtenir l'analogue du théorème 5 dans le cas de caractéristique nulle.

Conférences

Septembre 98, cours de 1 heure à la conférence sur la fonction zéta de Riemann à l'institut Schrödinger de Vienne.

Octobre-Novembre 98, 20 heures de cours l'université de Columbus Ohio (USA).

Novembre 98, 1 séminaire de mathématiques à Harvard.

Novembre 98, 1 séminaire de mathématiques et un séminaire de physique à Penn-State.

Decembre 98, 1 cours à la rencontre entre physiciens et mathématiciens de Stasbourg.

Janvier 99, 3 cours de 1 heure, Landau-Lectures Jerusalem.

Janvier 99, 1 conférence pour l'ouverture de l'institut mathématique de Beyrouth.

Mai 98 1 cours à Harvard (conference Atiyah-Singer-Bott-Hirzebruch).

Mai 98 1 cours de 1 heure au MIT en physique.

Mai 98 1 cours de 1 heure au Minnowbrook symposium sur la structure de l'espace-temps.

Juin 98 1 conférence en ouverture du Arbeitstagung de Bonn.

Juin 98 2 conférences à Oxford (Colloquium et séminaire).

Juin 98 1 cours à la conférence de géométrie Noncommutative de Bonn.

Publications

A. Connes, D. Kreimer, Hopf algebras, renormalization and Noncommuative geometry

Comm.Math.Phys.199 (1998) 203-242.

A. Connes, H. Moscovici, Hopf algebras, cyclic cohomology and the transverse index theorem

Comm. Math. Phys. 198 (1998) 199-246.

A. Connes, Trace formula in noncommutative geometry and the zeros of the riemann zeta function

Sel. math. , New ser. 5 (1999) 29-106