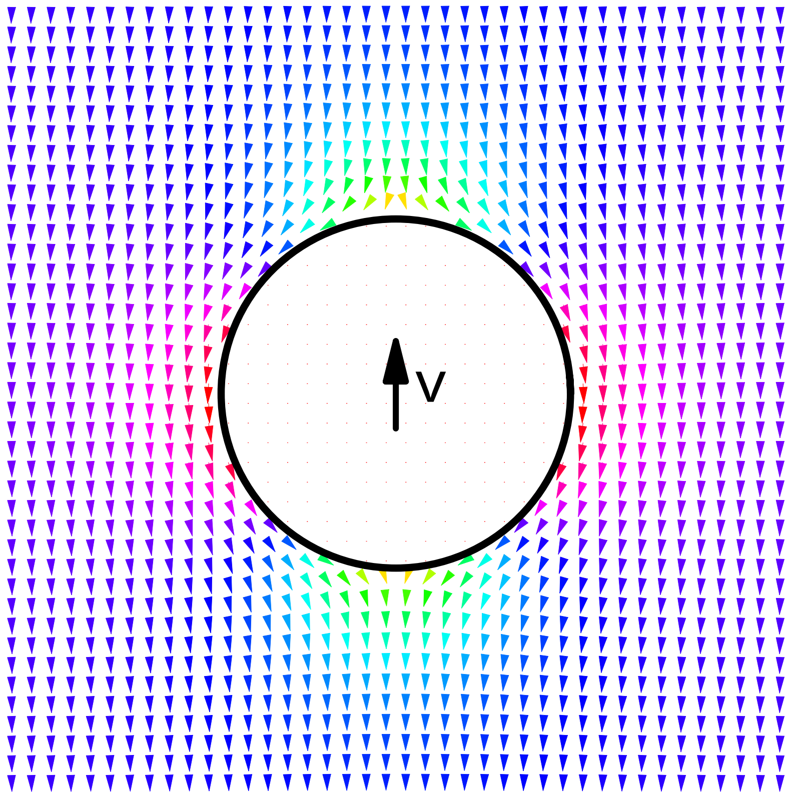
Transparents du troisième cours

– **Graphes de Feynman**

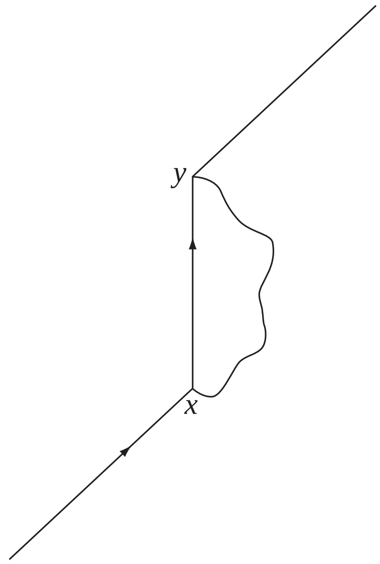
– **Renormalisation**



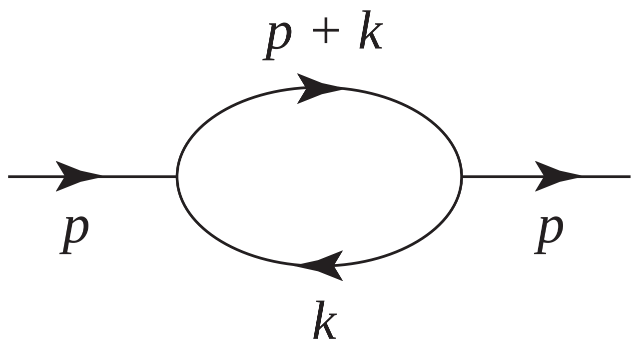
Hydrodynamique Green 1830

$$F = m\,a$$

$$m \rightarrow m + \delta m$$



Oppenheimer 1930



$$\frac{1}{2} g^2\,\delta(p_1 + p_2) \frac{1}{p_1^2 + m^2} \frac{1}{p_2^2 + m^2}$$

$$\int \frac{1}{k^2 + m^2} \frac{1}{((p_1 + k)^2 + m^2)}\, d^D k$$

$$D = 4$$

$$\int_{||k|| \leq \Lambda} \frac{1}{k^2 + m^2} \frac{1}{((p_1 + k)^2 + m^2)} \, d^4k \sim 2\,\pi^2 \ln \Lambda$$

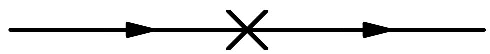
Une correction de la masse

$$\delta S(\phi_E) = \frac{1}{2} \, \delta m^2(\Lambda) \int \phi_E^2(x) \, d^4x \rightarrow$$

donne une nouvelle contribution à la fonction de Green

$$- \int \phi_E(x_1) \, \phi_E(x_2) \, \delta S(\phi_E) \, d\Lambda$$

Contre-terme



$$\delta S(\phi_E) = \frac{1}{2}\,\delta m^2(\Lambda)\,(2\pi)^{-4}$$

$$\int \widehat{\phi}(k_1)\,\widehat{\phi}(k_2)\,\delta(k_1+k_2)\,\prod d^4k_j \to$$

$$-\frac{1}{2}\,\delta m^2(\Lambda)\,(2\pi)^{-4}\,\delta(k_1+k_2)$$

$$(\int \widehat{\phi}(p_1)\,\widehat{\phi}(p_2)\,\widehat{\phi}(k_1)\,\widehat{\phi}(k_2)\,d\Lambda)\,\prod d^4k_j$$

$$\downarrow$$

$$-\,\delta m^2(\Lambda)\,(2\pi)^4\,\delta(p_1+p_2)\frac{1}{p_1^2+m^2}\frac{1}{p_2^2+m^2}$$

$$\delta m^2(\Lambda) = (2\pi)^{-4}\,\pi^2\,g^2\,\ln\Lambda \to OK$$

Développement perturbatif

$$S_N(x_1,\ldots,x_N) =$$

$$\sum \int \frac{V(\Gamma)(p_1,\ldots,p_N)}{\sigma(\Gamma)}\, e^{i(x_1.p_1+\ldots+x_N.p_N)} \prod \frac{dp_j}{(2\pi)^D}$$

– Γ (Graphe de Feynman)

– $V(\Gamma)(p_1,\ldots,p_N)$ (Valeur non-renormalisée)

– $\sigma(\Gamma)$ (facteur de symétrie)

Graphe de Feynman Γ

Complexe simplicial de dimension 1,

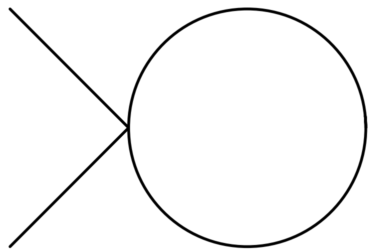
$\Gamma^{(0)}$ sommets, $\Gamma^{(1)}$ arêtes

$$\partial_j \; : \; \Gamma^{(1)} \to \Gamma^{(0)} \cup \{1, 2, \ldots, N\}\,, \quad \forall j \in \{0, 1\}$$

$$\iota \; : \; \Gamma^{(0)} \to I$$

où I est l'ensemble des monômes dans $\mathcal{L}_{\mathrm{int}}$.

Réalisation Géométrique



$$\deg \iota(v) = \sum \operatorname{card} \partial_j^{-1}\{v\}\,, \quad \forall v \in \Gamma^{(0)}$$

$$\sum \operatorname{card} \partial_j^{-1}\{v\} = 1\,, \quad \forall v \in \{1, 2, \ldots, N\}$$

Externes

$$\Gamma^{(1)}_{ext} = \cup_j\, \partial_j^{-1}\{1, 2, \ldots, N\} \subset \Gamma^{(1)}$$

Internes $\Gamma^{(1)}_{int} \subset \Gamma^{(1)}$

$|\Gamma|$ (non nécéssairement planaire)

$$|\Gamma| = \Gamma^{(1)} \times [0, 1] \cup_\partial (\Gamma^{(0)} \cup \{1, 2, \ldots, N\})$$

Accouplement $\rightarrow$ Graphe

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = \textstyle\sum_I \mathcal{M}$$

$$\frac{(-1)^n}{n!} \int \widehat{\phi}(p_1) \, \ldots \, \widehat{\phi}(p_N) \prod_{j \in X} \mathcal{M}_j \, d\Lambda$$

$$\mathcal{M} = \frac{-z}{d!} \, \phi_E(x)^d \rightarrow$$

$$z \, (2\pi)^D \, \delta(\sum k_i) \, \prod \, \widehat{\phi}(k_i) \, \frac{dk_i}{(2\pi)^D}$$

$$\mathcal{M} = \tfrac{-z}{2} (\partial \phi_E(x))^2 \rightarrow$$

$$z \, (2\pi)^D \, \delta(k_1 + k_2) \, k_1^2 \, \widehat{\phi}(k_1) \, \widehat{\phi}(k_2) \, \frac{dk_1 dk_2}{(2\pi)^{2D}}$$

Accouplement $\rightarrow$ Graphe

$$\int \widehat{\phi}(p_1) \, \ldots \, \widehat{\phi}(p_N) \, \prod_{j\in X} \prod_{i=1}^{d_j} \widehat{\phi}(k_i(j)) \, d\Lambda$$

Chaque accouplement donne un graphe Γ avec

– $\Gamma^{(0)} = X$, $\iota(j) = \mathcal{M}_j$, $X \rightarrow I$

– $\Gamma^{(1)}$ est l'ensemble des couples

Choix arbitraire d'orientation et ∂_j

$$p_\ell \rightarrow \ell \in \{1, 2, \ldots, N\}, \quad k_i(j) \rightarrow j \in X = \Gamma^{(0)}$$

p_i accouplé à $k_\ell \rightarrow$ externe

Règles de Feynman

1) Pour chaque $\ell \in \Gamma^{(1)}_{ext}$ un propagateur

$$\frac{1}{p_i^2 + m^2}, \quad i \in \partial(\ell)$$

2) Pour chaque $\ell \in \Gamma^{(1)}_{int}$ un moment $k = k_\ell$ et un propagateur

$$\frac{1}{k^2 + m^2} \frac{d^D k}{(2\pi)^D}$$

3) Pour chaque sommet v, $\iota(v) = \frac{-z}{d!} \phi_E^d$ une loi de conservation

$$z\,(2\pi)^D \,\delta\Big(\sum_{\partial_0(\ell)=v} k_\ell - \sum_{\partial_1(\ell)=v} k_\ell\Big)$$

4) Pour chaque sommet v, $\iota(v) = \frac{-z}{2} (\partial\phi_E)^2$ un terme

$$z\,(2\pi)^D \,k^2\, \delta\Big(\sum_{\partial_0(\ell)=v} k_\ell - \sum_{\partial_1(\ell)=v} k_\ell\Big)$$

Valeur $V(\Gamma)(p_1,\ldots,p_N)$

Intégrale multiple du produit des termes ci-dessus : $\prod_{\Gamma^{(0)}\cup\Gamma^{(1)}}$

Se factorise sur les composantes connexes de $|\Gamma|$

$$V(\Gamma)=\prod V(\Gamma_c)$$

Propagateurs externes

$$\epsilon(\Gamma)=(2\pi)^D\,\delta(\sum p_j)\prod\frac{1}{p_j^2+m^2}$$

$$\epsilon(\Gamma)=\prod\epsilon(\Gamma_c)$$

Nombre de variables d'intégration (connexe)

$$L(\Gamma)=\operatorname{card}\Gamma^{(1)}_{int}-\operatorname{card}\Gamma^{(0)}+1=b_1(|\Gamma|)$$

Facteur de symétrie

$$\frac{(-1)^n}{n!} \int \widehat{\phi}(p_1) \ldots \widehat{\phi}(p_N) \prod_{j \in X} \mathcal{M}_j \, d\Lambda$$

$|X| = n$, $\mathcal{M} = \dfrac{-z}{d!} \phi_E^d \to$ pas de signe $-$

$$\prod_{j \in X} \mathcal{M}_j = \prod_I \mathcal{M}^{n_\iota}, \quad \sum n_\iota = n$$

$(\sum_I \mathcal{M})^n \to$ binôme $\to$ dénominateur

$$\delta = \prod n_\iota! \prod (d_\iota!)^{n_\iota}, \quad d_\iota = \deg \mathcal{M}$$

ordre du groupe Δ des permutations des termes $\widehat{\phi}(k_i(j)$ qui respectent la structure $X \to I$ etc...

Isotropie accouplement =
Automorphisme du Graphe

$$\sigma(\Gamma) = \text{ card } \{g \in \Delta \, ; g(\pi) = \pi\}$$

$$\sigma(\Gamma) = \text{ card Aut}\Gamma$$

Orientation ne fait pas partie de la structure

Fonctions de Green connexes

$$Z(J) = \mathcal{N} \int \exp\left(i \frac{S(\phi) + \langle J, \phi \rangle}{\hbar}\right) D[\phi] =$$

$$\sum_{N=0}^{\infty} \frac{i^N}{N!} \int J(x_1) \ldots J(x_N)\, G_N(x_1, ..x_N)\, dx_1..dx_N,$$

$$iW(J) = \log(Z(J)) =$$

$$\sum_{N=0}^{\infty} \frac{i^N}{N!} \int J(x_1) \ldots J(x_N) G_{N,c}(x_1, ..x_N) dx_1..dx_N.$$

Propagateur $\rightarrow \hbar$, Interaction $\rightarrow \hbar^{-1}$,

Graphe $\Gamma(p_1, \ldots, p_N) \rightarrow \hbar^{N+L(\Gamma)-1}$

Source $J \rightarrow \hbar^{-1}$

$$\hbar^{L(\Gamma)-1}$$

Euclidien = énergie libre

$$W = \sum \frac{V(\Gamma)}{s(\Gamma)} \to e^W = \sum \frac{V(\Gamma)}{s(\Gamma)}$$

$$V(\Gamma_1 \cup \Gamma_2) = V(\Gamma_1)\, V(\Gamma_2)\,,\ s(\Gamma) = \prod n_j! \prod s(\Gamma_j)^{n_j}$$

$$Z(J_E) = \mathcal{N} \int \exp\left(-\frac{S(\phi_E) - \langle J_E, \phi_E \rangle}{\hbar}\right) D[\phi_E] =$$

$$\sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{N!} \int J_E(x_1) \ldots J_E(x_N)\, S_N(x_1, ..x_N)\, dx_1..dx_N,$$

$$W(J_E) = \log(Z(J_E)) = \sum_{\Gamma \text{connexe}} \frac{V(\Gamma)(J_E)}{\sigma(\Gamma)}$$

$$V(\Gamma)(J) =$$

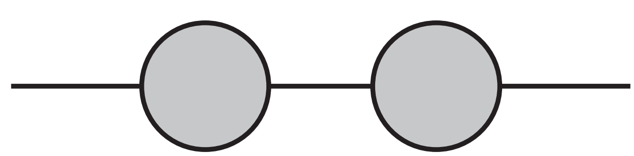
$$\frac{1}{N!} \int \hat{J}(p_1) \ldots \hat{J}(p_N)\, V(\Gamma(p_1, \ldots, p_N)) \prod \frac{dp_j}{(2\pi)^D}\,.$$

Graphes 1-particule irréductibles

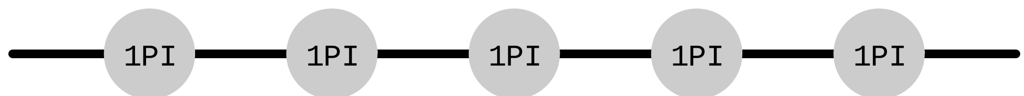
Soit Γ un graphe de Feynman connexe.

Γ est 1-*particule irréductible* (1PI) ssi

1. $L(\Gamma) \geq 1$ (pas un arbre)
2. Γ ne peut être disconnecté en enlevant une ligne $\ell \in \Gamma^{(1)}$



a) Soit Γ un graphe de Feynman connexe avec $|\Gamma^{(1)}_{ext}| = 2$, alors Γ est de la forme $\Pi_1 \star \ldots \star \Pi_n$ avec Π_j 1PI à deux arêtes externes



b) La somme des contributions de tous ces graphes est

$$\sum \frac{V(\Gamma(p,-p))}{\sigma(\Gamma)} = \frac{1}{p^2 + m^2 - \sum \frac{U(\Pi(p,-p))}{\sigma(\Pi)}}$$

Pas de propagateurs externes

$$V(\Gamma(p_1, \ldots, p_N)) = \epsilon(\Gamma)\, U(\Gamma(p_1, \ldots, p_N))$$

$$V(\Gamma(p,-p)) = (p^2 + m^2)^{-q-1}\, U(\Pi(p,-p))^q$$

Action effective S_{eff}

$$S_{eff}(\phi) = S(\phi) - \sum_{\Gamma \in 1\mathrm{PI}} \frac{U(\Gamma)(\phi)}{\sigma(\Gamma)}$$

Corrections quantiques de l'action,

$$\frac{S_{eff}(\phi)}{\hbar} = \frac{S(\phi)}{\hbar} - \frac{1}{\hbar} \sum_{\Gamma \in 1\mathrm{PI}} \hbar^L \frac{\Gamma(\phi)}{\sigma(\Gamma)}$$

$$U(\Gamma)(\phi) =$$

$$\frac{1}{N!} \int_{\sum p_j = 0} \widehat{\phi}(p_1) \ldots \widehat{\phi}(p_N)\, U(\Gamma(p_1, \ldots, p_N)) \prod \frac{dp_j}{(2\pi)^D}$$

$S_{eff} =$ **transformée de Legendre de** $W(J)$

$$\int P(\phi)\, e^{-S(\phi)}\, D[\phi] = \int_{\mathbf{arbre}} P(\phi)\, e^{-S_{eff}(\phi)}\, D[\phi]$$

Phase stationnaire sur

$$\exp\left(-\frac{S_{eff}(\phi)}{T}\right)$$

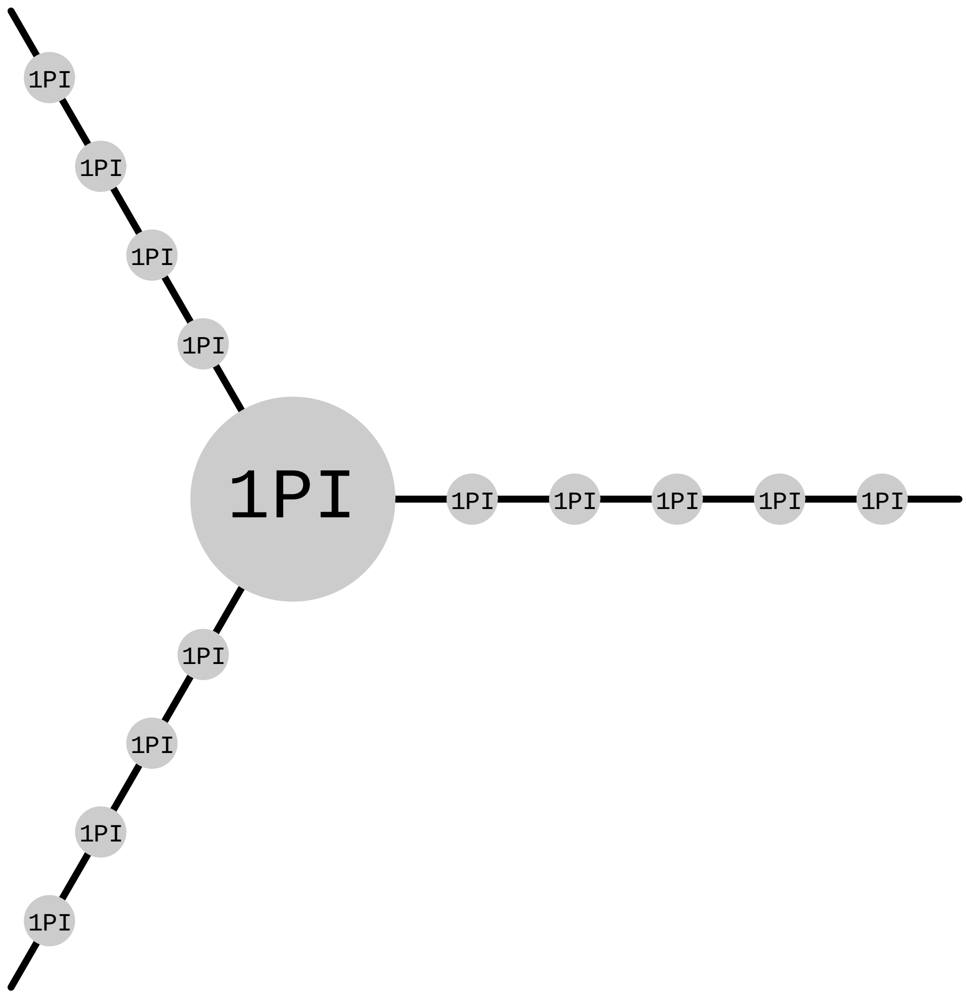
$$\downarrow$$

réponse exacte !

$\Longleftrightarrow W(J)$ transformée de Legendre de $S_{eff}(\phi)$

Forme générale d'un graphe Γ connexe avec

$$|\Gamma^{(1)}_{ext}| = 3$$



Masse Physique

Représentation du groupe de Poincaré
$k^2 = \mu^2, k_0 > 0$

particules

$$\mathcal{F}_m = \oplus_0^\infty S^n \mathcal{H}_m$$

$$G_{2,c}(x_1, x_2) = \int \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} e^{i(x_1 - x_2).p} \frac{d^D p}{(2\pi)^D}$$

$$= \Delta_+(x_1 - x_2, m^2)$$

Lehmann-Källen

La fonction de Green connexe (Minkowski)

$$Z^{-1}\, G_{2,c}(x_1, x_2) =$$

$$\Delta_+(x_1 - x_2, m^2_{phys}) + \int_{m^2_{phys}+c} \Delta_+(x_1 - x_2, u)\, \sigma(u)\, du$$

$G_{2,c}$ a un pôle isolé en $p^2 = m^2_{phys}$

Euclidien + Action effective

$$S_{2,c}(p) = \frac{1}{p^2 + m^2 - \sum U(\Pi(p,-p))/\sigma(\Pi)}$$

Calcul de m_{phys}

$$p^2 + m^2 - \sum \frac{U(\Pi(p,-p))}{\sigma(\Pi)} = 0 \quad \text{pour } p^2 = -m_{phys}^2$$

self-énergie

$$\Pi(p^2) = \sum \frac{U(\Pi(p,-p))}{\sigma(\Pi)}$$

Matrice S (LSZ)

$$\phi' = Z^{-1/2}\,\phi$$

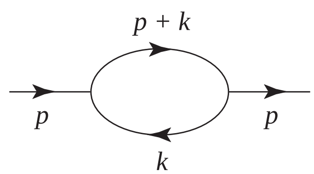
$Z =$ résidu de $S_{2,\,c}(p)$ au pôle $p^2 = -\,m^2_{phys}$

$$\langle k_1, \ldots, k_s | S - 1 | k_{s+1}, \ldots, k_r \rangle = i^{-r}\, Z^{-r/2}$$

$$\prod (k_j^2 - m^2_{phys})\, G_N(-k_1, \ldots, -k_s, k_{s+1}, \ldots, k_r)$$

Elément de $S - 1$ matrice = Fonction de Green sans propagateur externe

Renormalisation de la masse



$$D = 4$$

Contribution à la self-énergie

$$\pi(p^2) = \frac{1}{2} g^2 (2\pi)^{-4} \int \frac{1}{k^2 + m^2} \frac{1}{((p+k)^2 + m^2)} d^4k$$

Renormalisation de la masse

On distingue la masse *nue* m_0 de la masse physique m_{phys} et on pose

$$m_0^2 = m^2 + \delta m^2(\Lambda)$$

et

On considère $\delta m^2(\Lambda)\frac{\phi^2}{2}$ comme un nouveau terme d'interaction dans le Lagrangien.

On prend $m = m_{phys}$.

(d'où le propagateur $(p^2 + m^2)^{-1}$)

Contre-terme de masse

On choisit $\delta m^2(\Lambda)$ pour que la condition

$$\Pi(-m^2) = 0$$

soit vérifiée, d'où

$$\delta m^2 = \pi(-m^2)$$

$$\pi_{ren}(p^2) = \pi(p^2) - \pi(-m^2)$$

$$\pi_{ren}(p^2) = \frac{g^2}{32\pi^2} \int_0^1 \log(\frac{x(1-x)p^2 + m^2}{m^2(1+x-x^2)})\, dx$$

Renormalisation de ϕ

$$\phi = Z^{1/2}\,\phi'$$

On change de variable dans l'intégrale fonctionnelle

$$\mathcal{N}' \int \exp(-S(Z^{1/2}\,\phi'))\,\phi'(x_1)\ldots\phi'(x_N) D[\phi']$$

$$\mathcal{L}' = \frac{1}{2} Z(\partial\phi')^2 + \ldots$$

On choisit $Z(\Lambda)$ pour que la condition

$$\partial\Pi(-m^2) = 0$$

soit vérifiée.

N.N. Bogoliubov and D.V. Shirkov, *Introduction to the theory of quantized fields*, 3rd ed., Wiley 1980.

J. Collins, *Renormalization*, Cambridge Monographs in Math. Physics, Cambridge University Press, 1984.

M. Dresden, *Renormalization in historical perspective - The first stage*, in "Renormalization", ed. L. Brown, Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg 1994.

J. Glimm and A. Jaffe. Quantum physics. *Springer, New York,* 1981