Transparents du cinquième cours

- **Algèbre de Hopf des graphes**
- **Birkhoff**
- $\partial_\mu \, \gamma_\mu^- = 0$
- **Correspondance de Riemann-Hilbert**

Graphe de Feynman Graph($\mathcal{T}$)

Complexe simplicial de dimension 1,

$\Gamma^{(0)}$ sommets, $\Gamma^{(1)}$ arêtes

$$\partial_j \ : \ \Gamma^{(1)} \to \Gamma^{(0)} \cup \{1, 2, \ldots, N\}\,, \quad \forall j \in \{0, 1\}$$

$$\iota \ : \ \Gamma^{(0)} \to J$$

où J est l'ensemble de tous les monômes de $\mathcal{L}$.

$$\deg \iota(v) = \sum \operatorname{card} \partial_j^{-1}\{v\}\,, \quad \forall v \in \Gamma^{(0)}$$

Sous-graphes

$$\Gamma \in \text{Graph}(\mathcal{T})$$

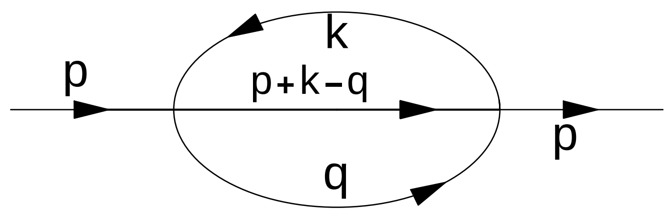
$$\text{Sous-graphe} = (\gamma, \chi),\ \gamma \subset \Gamma^{(1)}_{int} \text{ et}$$

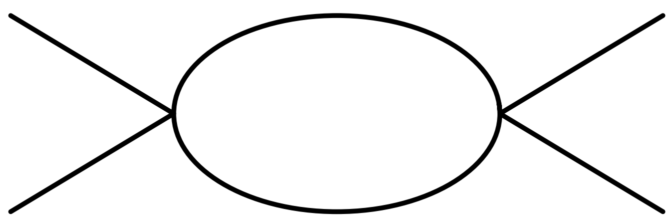
$$\chi\ :\ \{\text{composantes de } |\gamma| \subset |\Gamma|\} \to J$$

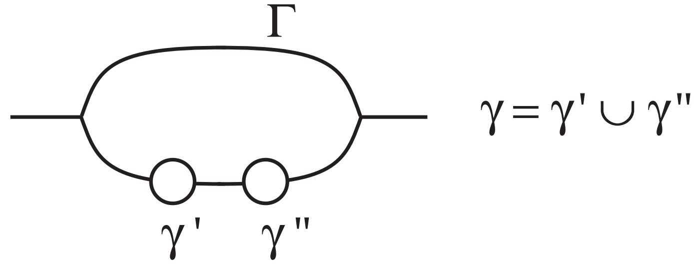
$$\text{Chaque composante } \gamma_i \subset \Gamma^{(1)}_{int} \to \delta = \tilde{\gamma}_i$$

- Arêtes internes $\delta^{(1)}_{int} = \gamma_i$
- Sommets $\delta^{(0)} = \Gamma^{(0)} \cap |\gamma_i|$
- Arêtes externes en v = union disjointe des $\partial_j^{-1}(v) \cap \gamma_i^c$
- Applications ∂_j et ι par restriction de Γ

Sous-graphes

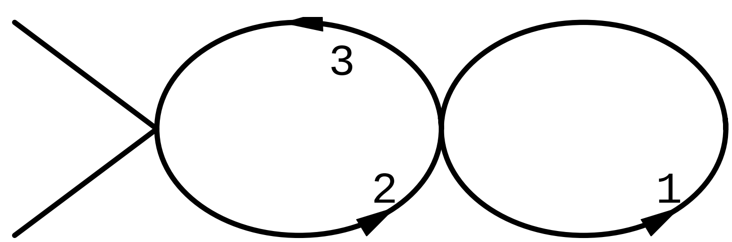






Graphe contracté Γ/γ

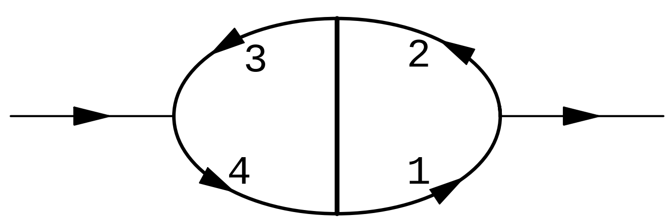
- Arêtes internes $\Gamma^{(1)}_{int}\backslash\gamma$
- Sommets = union disjointe de $\Gamma^{(0)}\backslash|\gamma|$ avec l'ensemble des composantes de $|\gamma|$
- Arêtes externes comme Γ
- Applications ∂_j par restriction de celles de Γ
- Application ι par restriction sur $\Gamma^{(0)}\backslash|\gamma|$ et χ sur l'ensemble des composantes de $|\gamma|$



Sous-graphe

Soit $\Gamma \in \mathrm{Graph}(\mathcal{T})$, un *sous–graphe* de Γ est un couple (γ, χ) tel que

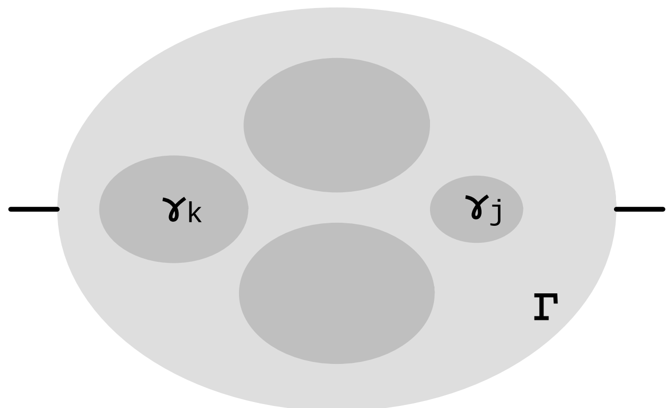
1. Les composantes de γ sont des graphes 1PI.
2. $\Gamma/\gamma \in \mathrm{Graph}(\mathcal{T})$



Condition équivalente :

$\deg \chi(\gamma_i) =$ nombre d'arêtes externes de $\tilde{\gamma}_i$

$$\Gamma/\gamma \text{ 1PI} \Leftrightarrow \Gamma \text{ 1PI}$$



$$\pi \ : \ |\Gamma| \to |\Gamma/\gamma|$$

Extension des règles de Feynman

$$\overset{0}{-\!\!\times\!\!-} \ \to -\frac{1}{2}m^2\phi^2 \to m^2\,\delta$$

$$\overset{1}{-\!\!\times\!\!-} \ \to -\frac{1}{2}(\partial\phi)^2 \to k^2\,\delta$$

(σ_ι), $\iota \in J$, base duale des monômes du Lagrangien

BPHZ

Préparation

On prépare d'abord un graphe Γ, en remplaçant la valeur non-renormalisée $U(\Gamma)$ par

$$\overline{R}(\Gamma) = U(\Gamma) + \sum_{\gamma \prec \Gamma} C(\gamma) U(\Gamma/\gamma)$$

Contre-termes

$$C(\Gamma) = -T(\overline{R}(\Gamma)) =$$

$$-T\left(U(\Gamma) + \sum_{\gamma \prec \Gamma} C(\gamma) U(\Gamma/\gamma)\right)$$

Valeur renormalisée

$$R(\Gamma) = \overline{R}(\Gamma) + C(\Gamma) =$$

$$U(\Gamma) + C(\Gamma) + \sum_{\gamma \prec \Gamma} C(\gamma) U(\Gamma/\gamma)$$

Théorème BPHZ

Si l'on calcule avec le Lagrangien

$$\mathcal{L}_E - \sum_{\iota(\Gamma^{(0)})\subset I} \frac{C(\Gamma)}{\sigma(\Gamma)}$$

on obtient la valeur renormalisée

$$\frac{1}{2}\left(1 - \sum \frac{C(\Gamma_{(1)})}{\sigma(\Gamma)}\right)(\partial\phi)^2 +$$

$$\frac{m^2}{2}\left(1 - \sum \frac{C(\Gamma_{(0)})}{\sigma(\Gamma)}\right)\phi^2 - \frac{g}{6}\left(1 + \sum \frac{C(\Gamma)}{\sigma(\Gamma)}\right)\phi^3$$

Algèbres de Hopf = Schémas en groupe affine

$$\begin{array}{ll}(\Delta \otimes id)\Delta = (id \otimes \Delta)\Delta & : \mathcal{H} \to \mathcal{H}^{\otimes_k^3}, \\ (id \otimes \varepsilon)\Delta = id = (\varepsilon \otimes id)\Delta & : \mathcal{H} \to \mathcal{H}, \\ m(id \otimes S)\Delta = m(S \otimes id)\Delta = 1\,\varepsilon & : \mathcal{H} \to \mathcal{H},\end{array}$$

Foncteur covariant

$$G(A) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}_k}(\mathcal{H}, A).$$

$$\phi\,: \mathcal{H} \to A\,, \quad \phi(x\,y) = \phi(x)\phi(y), \quad \forall x, y \in \mathcal{H}\,,$$

$$\phi_1 \star \phi_2\,(x) = \langle \phi_1 \otimes \phi_2\,,\; \Delta(x)\rangle\,.$$

Exemples

Groupe additif

$$G = \mathbb{G}_a,\ \mathcal{H} = k[t],\ \Delta(t) = t \otimes 1 + 1 \otimes t$$

Groupe multiplicatif

$$G = \mathbb{G}_m,\ \mathcal{H} = k[t, t^{-1}],\ \Delta(t) = t \otimes t.$$

Racines de l'unité

$$\mu_n,\ \mathcal{H} = k[t]/(t^n - 1),$$

$$G = \mathrm{GL}_n$$

$$\mathcal{H} = k[x_{i,j}, t]_{i,j=1,\ldots,n} / \det(x_{i,j})t - 1,$$

Algèbre de Lie

Lie G est un foncteur covariant vers la catégorie $\mathcal{L}_k$ des algèbres de Lie

$$L(X\,Y) = L(X)\,\varepsilon(Y) + \varepsilon(X)\,L(Y)\,, \quad \forall X\,, Y \in \mathcal{H}\,,$$

$$[L_1, L_2](X) = \langle L_1 \otimes L_2 - L_2 \otimes L_1, \Delta(X)\rangle\,.$$

Milnor-Moore

Soit $\mathcal{H}$ une algèbre de Hopf commutative sur k (caractéristique zéro). On suppose $\mathcal{H}$ graduée positivement et connexe, $\mathcal{H} = \oplus_{n\geq 0}\mathcal{H}_n$, avec $\mathcal{H}_0 = k$, $\mathcal{H}_n$ de dimension finie. Soit $\mathcal{H}^\vee$ la duale et $\mathcal{L}$ l'algèbre de Lie des éléments primitifs de $\mathcal{H}^\vee$. On a un isomorphisme canonique d'algèbres de Hopf

$$\mathcal{H} \cong U(\mathcal{L})^\vee,$$

où $U(\mathcal{L})$ est l'algèbre enveloppante de $\mathcal{L}$. De plus, $\mathcal{L} = \text{Lie } G(k)$ comme algèbre de Lie graduée.

Algèbre de Hopf des graphes

$\mathcal{T}$ théorie renormalisable $\to$ $\mathcal{H}(\mathcal{T})$ engendrée par $\{(\Gamma, w)\}$

$\Gamma \in \mathrm{Graph}(\mathcal{T})$ est 1PI, $w \in J$ de degré le nombre d'arêtes externes de Γ

Coproduit

$$\Delta(\Gamma) = \Gamma \otimes 1 + 1 \otimes \Gamma + \sum_{\gamma \prec \Gamma} \gamma \otimes \Gamma/\gamma$$

$$\gamma = \prod (\tilde{\gamma}_i, \chi(\gamma_i))$$

$\Gamma/\gamma \sim (\Gamma/\gamma, w)$ avec le même w que Γ

$$\mathcal{H}(\mathcal{T}) = \textbf{Hopf}$$

$$(\Delta \otimes \mathrm{id})\,\Delta = (\mathrm{id} \otimes \Delta)\,\Delta$$

à vérifier sur les générateurs

$$\Delta\,\Gamma = \sum_{\gamma \preceq \Gamma} \tilde{\gamma} \otimes \Gamma/\gamma$$

$$(\Delta \otimes \mathrm{id})\,\Delta\,\Gamma = \sum_{\gamma \preceq \Gamma} \Delta\,\tilde{\gamma} \otimes \Gamma/\gamma$$

$$\Delta(\tilde{\gamma}) = \prod \Delta(\tilde{\gamma}_j)$$

$$\Delta(\tilde{\gamma}) = \sum_{\gamma' \preceq \tilde{\gamma}} \tilde{\gamma}' \otimes \tilde{\gamma}/\gamma'$$

notation étendue au cas non connexe

On pose $\gamma' = \cup \gamma'_j$ d'où $\gamma' \subset \gamma$

$$\gamma' \preceq \Gamma \Leftrightarrow (\gamma_j \cap \gamma') \preceq \tilde{\gamma}_j \, , \quad \forall j$$

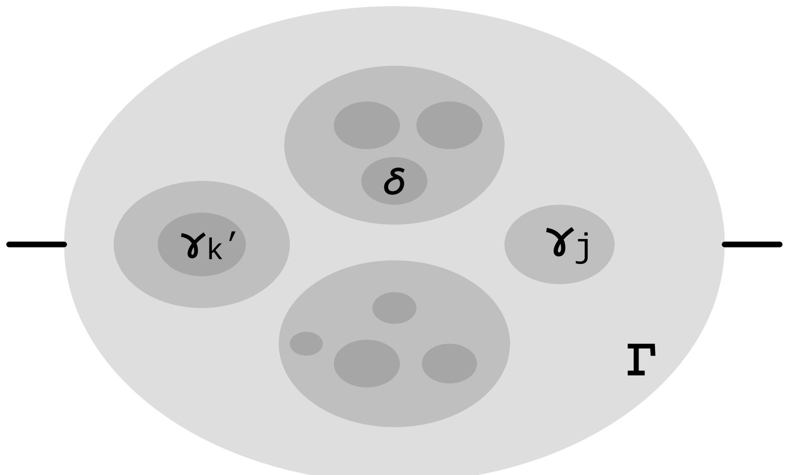
Composante δ de γ' $\subset$ composante γ_j de γ

$\tilde{\delta}$ indépendant du contexte

$$(\Delta \otimes \mathrm{id}) \, \Delta \, \Gamma = \sum_{\gamma' \preceq \gamma \preceq \Gamma} \tilde{\gamma}' \otimes \tilde{\gamma}/\gamma' \otimes \Gamma/\gamma$$

$$\gamma \preceq \Gamma \, , \quad \gamma' \preceq \Gamma \, , \quad \gamma' \subset \gamma$$

$$(\mathrm{id} \otimes \Delta)\, \Delta\, \Gamma = \sum_{\gamma' \preceq \Gamma} \tilde{\gamma}' \otimes \Delta\, (\Gamma/\gamma')$$



Il reste à montrer que

$$\Delta\, (\Gamma/\gamma') = \sum_{\gamma \preceq \Gamma,\, \gamma \supset \gamma'} \tilde{\gamma}/\gamma' \otimes \Gamma/\gamma$$

$\Gamma' = \Gamma/\gamma'$ graphe contracté

$$\gamma \supset \gamma' \leftrightarrow \rho(\gamma) = \gamma'' = \gamma \backslash \gamma'$$

$$\gamma \preceq \Gamma \Leftrightarrow \rho(\gamma) \preceq \Gamma', \quad \tilde{\gamma}/\gamma' = \rho(\tilde{\gamma}), \quad \Gamma/\gamma = \Gamma'/\rho(\gamma)$$

$$\pi : |\Gamma| \to |\Gamma/\gamma'|$$

$\pi(x) = \pi(y) \Leftrightarrow x$ et y dans la même composante de $|\gamma'| \Rightarrow$ même comp. de $|\gamma|$

Les $\pi(\gamma_j)$ sont disjoints et sont les composantes γ''_j de γ'' sous-graphe de Γ'

Pour chaque composante γ_i de γ on a $\tilde{\gamma}_i/\gamma' = \tilde{\gamma}''_i$ avec $\gamma''_i = \gamma_i \backslash \gamma'$

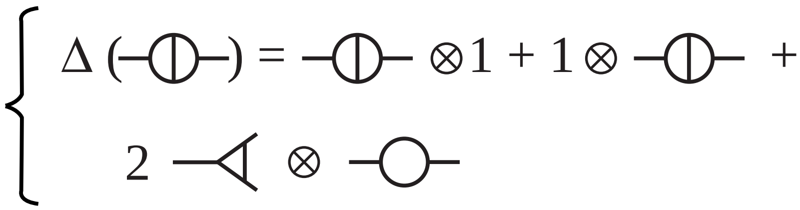
$$\tilde{\gamma}_i \quad 1PI \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{\gamma}''_i \quad 1PI$$

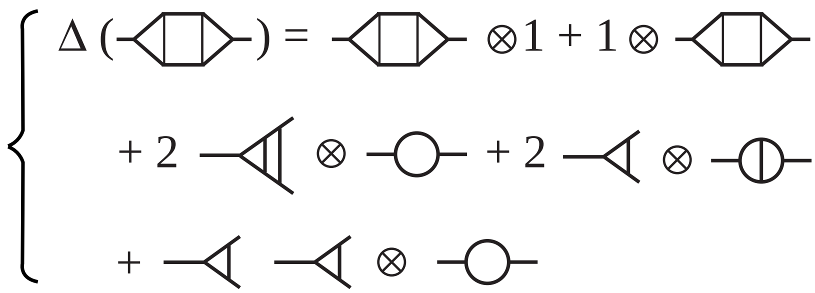
$$\Gamma'/\gamma'' = \Gamma/\gamma \text{ i.e. } (\Gamma/\gamma')/\gamma'' = \Gamma/\gamma$$

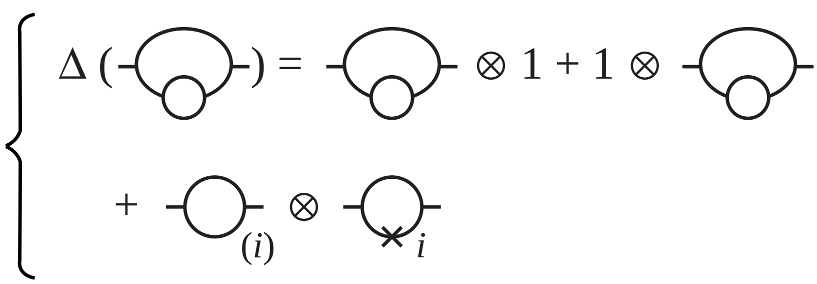
Arêtes internes = complément de $\gamma = \gamma' \cup \gamma''$ dans $\Gamma^{(1)}_{int}$

Sommets, on passe au quotient en deux étapes

Application χ






(i)
i

Graduations

$$\deg(\Gamma_1 \cdots \Gamma_r) = \sum_i \deg(\Gamma_i) \quad \text{and} \quad \deg(1) = 0.$$

$b_1(\Gamma) =$ nombre de boucles

$$\ell(\Gamma) = \text{ Card}\, \Gamma_{int}^{(1)}\,, \quad \ell(\prod \Gamma_j) = \sum \ell(\Gamma_j)$$

Les $\mathcal{H}_n$ sont de dimension finie

$$v(\Gamma) = \text{ Card}\, \Gamma^{(0)} - 1\,, \quad v(\prod \Gamma_j) = \sum v(\Gamma_j)$$

Algèbre de Lie de $\mathrm{Difg}(\mathcal{T})$

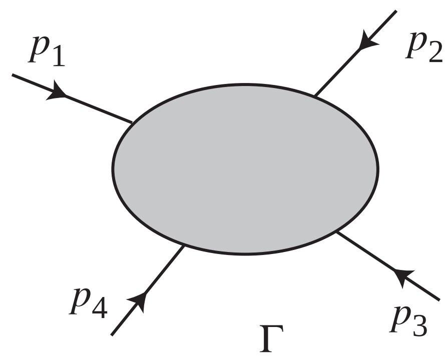
$$[(\Gamma, w), (\Gamma', w')] =$$

$$\sum_{v,\ \iota(v)=w'} (\Gamma \circ_v \Gamma', w) - \sum_{v',\ \iota(v')=w} (\Gamma' \circ_{v'} \Gamma, w')$$

où $\Gamma \circ_v \Gamma'$ s'obtient en insérant Γ' dans Γ au sommet v de Γ

(Il y a plusieurs manières d'insérer)

Structure externe



$$C_c^{-\infty}(E) = \oplus_\Gamma C_c^{-\infty}(E_\Gamma)$$

$$\tilde{\mathcal{H}}(\mathcal{T}) = \mathsf{Sym}(C_c^{-\infty}(E))$$

$$\Delta(\Gamma, \sigma) = (\Gamma, \sigma) \otimes 1 + 1 \otimes (\Gamma, \sigma) +$$

$$\sum_{\gamma \prec \Gamma} (\gamma, \sigma_{\chi(\gamma)}) \otimes (\Gamma/\gamma, \sigma)$$

$$(\gamma, \sigma_{\chi(\gamma)}) = \prod (\tilde{\gamma}_i, \sigma_{\chi(\gamma_i)})$$

$$\widetilde{\mathsf{Difg}}(\mathcal{T}) = \mathsf{Difg}_{ab}(\mathcal{T}) \rtimes \mathsf{Difg}(\mathcal{T}),$$

$$\mathcal{L} = C^\infty(E), \quad L = (f_\Gamma)\,, \quad f_\Gamma \in C^\infty(E_\Gamma)$$

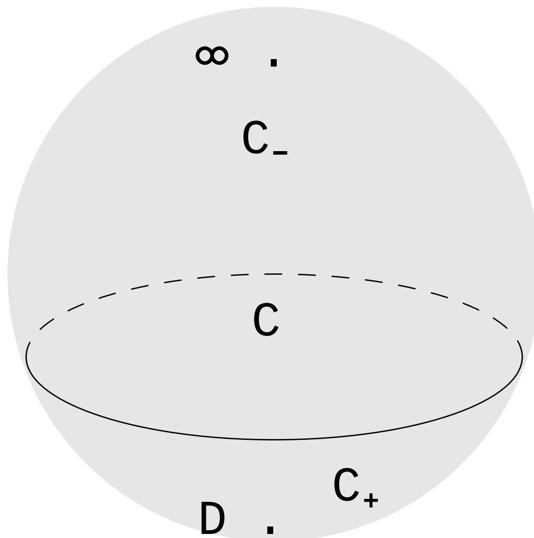
$$\langle Z_L, (\Gamma, \sigma)\rangle := \sigma(f^\Gamma)$$

$$[L_1, L_2]^\Gamma = \sum_{\gamma \in \mathcal{V}_c(\Gamma),\, w} \sigma_w(f_1^\gamma)\, f_2^{\Gamma/\gamma} - \sigma_w(f_2^\gamma)\, f_1^{\Gamma/\gamma}$$

$$L = (f_\Gamma) \in \mathcal{L}_{ab} \Leftrightarrow \sigma_w(f^\gamma) = 0\,, \quad \forall w \in J$$

Décomposition de Birkhoff

Fibrés holomorphes sur la sphère



$$\gamma(z) = \gamma_-(z)^{-1}\,\lambda(z)\,\gamma_+(z) \qquad z \in C$$

$$\lambda(z) = \begin{pmatrix} z^{k_1} & & & \\ & z^{k_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & z^{k_n} \end{pmatrix}$$

Décomposition de Birkhoff

Théorème (ac+dk)

Soit $\phi : \mathcal{H} \to K = \mathbb{C}(\{z\}) = \mathbb{C}\{z\}[z^{-1}]$ un homomorphisme d'algèbre. La décomposition de Birkhoff du lacet correspondant est donnée par recurrence par

$$\phi_-(X) = -T\left(\phi(X) + \sum \phi_-(X')\phi(X'')\right)$$

et

$$\phi_+(X) = \phi(X) + \phi_-(X) + \sum \phi_-(X')\phi(X'').$$

Cela coincide avec BPHZ !

$\phi = U$, $\phi_- = C$, et $\phi_+ = R$

$$\Delta(X) = X \otimes 1 + 1 \otimes X + \sum X' \otimes X''.$$

$$(\mathrm{Id} \otimes \varepsilon) \circ \Delta = \mathrm{Id}\,, \quad (\varepsilon \otimes \mathrm{Id}) \circ \Delta = \mathrm{Id}$$

$$\Delta(XY) = XY \otimes 1 + 1 \otimes XY + X \otimes Y + Y \otimes X$$

$$+XY' \otimes Y'' + Y' \otimes XY'' + X'Y \otimes X''$$

$$+X' \otimes X''Y + X'Y' \otimes X''Y''$$

$$\downarrow$$

$$\phi_-(XY) =$$

$$-T(\phi(XY)) - T(\phi_-(X)\,\phi(Y) + \phi_-(Y)\,\phi(X) +$$

$$\phi_-(XY')\,\phi(Y'') + \phi_-(Y')\,\phi(XY'') + \phi_-(X'Y)\,\phi(X'')$$

$$+\,\phi_-(X')\,\phi(X''Y) + \phi_-(X'Y')\,\phi(X''Y''))$$

Récurrence

$$\phi_-(AB) = \phi_-(A)\,\phi_-(B), \text{ pour}$$
$$\deg A + \deg B < \deg X + \deg Y$$

$$\phi_-(XY) =$$

$$-T(\phi(X)\,\phi(Y) + \phi_-(X)\,\phi(Y) + \phi_-(Y)\,\phi(X)$$

$$+\,\phi_-(X)\,\phi_-(Y')\,\phi(Y'') + \phi_-(Y')\,\phi(X)\,\phi(Y'')$$

$$+\phi_-(X')\,\phi_-(Y)\,\phi(X'')$$

$$+\,\phi_-(X')\,\phi(X'')\,\phi(Y) + \phi_-(X')\,\phi_-(Y')\,\phi(X'')\,\phi(Y''))$$

et

$$T(f)\,T(h) = -T(fh) + T(T(f)\,h) + T(f\,T(h))$$

$$f = \phi(X) + \phi_-(X')\,\phi(X'')$$

$$h = \phi(Y) + \phi_-(Y')\,\phi(Y'')$$

$$\phi_-(X)\,\phi_-(Y) =$$

$$-T((\phi(X)+\phi_-(X')\,\phi(X''))\,(\phi(Y)+\phi_-(Y')\,\phi(Y''))$$

$$+T(T(\phi(X)+\phi_-(X')\,\phi(X''))\,(\phi(Y)+\phi_-(Y')\,\phi(Y''))$$

$$+T((\phi(X)+\phi_-(X')\,\phi(X''))\,T(\phi(Y)+\phi_-(Y')\,\phi(Y'')))$$

et

$$T(f) = -\phi_-(X),\ T(h) = -\phi_-(Y)$$

$$\downarrow$$

$$\phi_-(X)\,\phi_-(Y) =$$

$$-T(\phi(X)\,\phi(Y) + \phi_-(X')\,\phi(X'')\,\phi(Y)$$

$$+\,\phi(X)\,\phi_-(Y')\,\phi(Y'')+\phi_-(X')\,\phi(X'')\,\phi_-(Y')\,\phi(Y''))$$

$$-T(\phi_-(X)(\phi(Y) + \phi_-(Y')\,\phi(Y''))$$

$$-T((\phi(X) + \phi_-(X')\,\phi(X''))\,\phi_-(Y))$$

Décomposition de Birkhoff

Soit $\mathcal{T}$ une théorie renormalisable, $\mathcal{H}(\mathcal{T})$ l'algèbre de Hopf (discrete) et Difg($\mathcal{T}$) le groupe. Les termes ϕ_- et ϕ_+ de la décomposition de Birkhoff du morphisme U donnent respectivement les contre-termes et la valeur renormalisée pour la méthode BPHZ appliquée à la théorie $\mathcal{T}'$ avec sommets associés à J.

Paramètre μ

Graduation

$$\theta_t \in \mathrm{Aut}(\mathrm{Difg}(\mathcal{T})), \quad \forall t \in \mathbb{R}\,, \quad \frac{d}{dt}\,\theta_t\,|_{t=0} = Y$$

$$Y(X) = n\,X, \quad \forall X \in \mathcal{H}_n^{\vee}(\mathcal{T})$$

$$\langle \theta_t(u), x \rangle = \langle u, \theta_t(x) \rangle\,, \quad \forall x \in \mathcal{H}\,, u \in \mathcal{H}^{\vee}$$

$$U_\mu^z(\Gamma) = \mu^{zL} \int \frac{P(\kappa,p)}{\prod_j F_j(\kappa,p)^2 + m_j^2} \prod d\kappa_\ell^{D-z}$$

$$\downarrow$$

$$\gamma_{e^t\mu}(z) = \theta_{tz}(\gamma_\mu(z))$$

Soit $\gamma_\mu(z) \in \mathrm{Difg}(\mathcal{T})$ le lacet des valeurs non-renormalisées $U_\mu^z(\Gamma)$. Soit $\gamma_\mu(z) = \gamma_{\mu^-}(z)^{-1}\gamma_{\mu^+}(z)$ sa décomposition de Birkhoff, alors

$$\frac{\partial}{\partial\mu}\gamma_{\mu^-}(z) = 0\,.$$

– Les contre-termes de la théorie $\mathcal{T}'$ dépendent de manière polynômiale des paramètres massifs (μ non compris).
– Seules les puissances de $\log\mu$ pourraient apparaitre.
– Par analyse dimensionnelle ces termes sont exclus.

$$\log(p^2/\mu^2)$$

et

$$\log(M^2/\mu^2)$$

Equations différentielles linéaires

Equation linéaire $\sim \frac{dy}{dz} + A(z)y(z) = 0$

Exemples : 1) Hypergéométrique

$$x(1-x)\,y'' + (c-(a+b+1)x)\,y' - aby = 0$$

dont l'une des solutions est

$$F(a,b,c;x) = 1 + \frac{ab}{c}\,x + \frac{a(a+1)b(b+1)}{2!c(c+1)}\,x^2 + \ldots$$

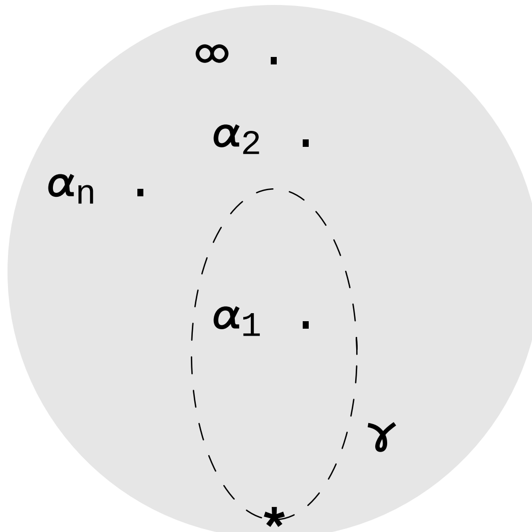
2) Prolate

$$(x^2 - \Lambda^2)\,y'' + 2x\,y' + \Lambda^2\,x^2\,y = 0$$

3) Singulier irrégulier

$$x^2\,y' + y = 0$$

Monodromie



$$\nabla = d + A(z)\,dz$$

Connection plate

$$\rho \;:\; \pi_1(X - S, \star) \to \mathsf{GL}(\mathsf{Sol}_*)$$

Exemples

1) $D = x\frac{d}{dx} - \alpha$, on a $S = \{0, \infty\}$, $\rho = e^{2\pi i\alpha}$

2) $D = x(\frac{d}{dx})^2 + \frac{d}{dx}$ on a $S = \{0, \infty\}$,

$$\rho = \begin{bmatrix} 1 & 2\pi i \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3) $D = x^2\frac{d}{dx} + 1$, on a $S = \{0\}$, et pas de monodromie.

4) Hypergéométrique : Les valeurs propres de $\rho(\gamma)$ sont les e^{ν} avec les ν donnés sur $S = \{0, 1, \infty\}$ par

$0 \to \{0, 1{-}c\}$ $\quad 1 \to \{a, b\}$ $\quad \infty \to \{0, c{-}a{-}b\}$

Singularités régulières

$$D = \delta^n + b_{n-1}\,\delta^{n-1} + \ldots + b_0\,, \quad \delta = x\frac{d}{dx}\,,\ b_j \in \mathbb{C}\{x\}$$

$$\Updownarrow$$

$$|x|^{\mu}|y(x)| < C\,, \quad \forall x\,, \alpha < \operatorname{Arg} x < \beta$$

Correspondance de Riemann-Hilbert

Equation régulière singulière

$$\updownarrow$$

Représentation de monodromie