

Transparents du neuvième cours

- Structures de Hodge mixtes
- Réalisation spectrale des zéros de zêta
- Fonctions L
- Facteurs locaux archimédiens
- Endomotifs

(ac + cc + mm)

Filtration de Hodge

Filtration de Hodge

$$F^p H_{\mathbb{C}}^m = \bigoplus_{r \geq p} H^{r, m-r}$$

Pour tout p on a

$$H_{\mathbb{C}}^m = F^p H_{\mathbb{C}}^m \oplus \overline{F^{m-p+1} H_{\mathbb{C}}^m}$$

Les $H^{p,q}$ sont déterminés par

$$H^{p,q} = F^p H_{\mathbb{C}}^m \cap \overline{F^q H_{\mathbb{C}}^m}$$

Structures de Hodge mixtes

Une structure de Hodge mixte sur \mathbb{Q} (\mathbb{Q} -MHS) est un triplet $(V, W_\bullet, F^\bullet)$ avec

- V espace vectoriel sur \mathbb{Q} , $W \cdot V$ filtration croissante (poids)
- $F^\bullet V_{\mathbb{C}}$ filtration décroissante de $V_{\mathbb{C}} = V \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$ (Hodge),

vérifiant

$$\mathrm{Gr}_n^W V_{\mathbb{C}} = F^p \mathrm{Gr}_n^W V_{\mathbb{C}} \oplus \overline{F^{n-p+1}} \mathrm{Gr}_n^W V_{\mathbb{C}},$$

où \bar{F}^\bullet est le conjugué de F^\bullet

Morphismes : $\phi : V \rightarrow V'$ préservant les filtrations

Thm : \mathbb{Q} -MHS est une catégorie abélienne

Exemples

Hodge-Tate de poids $-2n$, $V = (2\pi i)^n \mathbb{Q}$, $H^{-n, -n}$

($(V, W_\bullet, F^\bullet)$ est pure de poids n si $W_n = V$ et $W_{n-1} = 0$)

$$M_{1,x,\mathbb{Z}} = \{(a, b) \in \mathbb{C} \times \mathbb{Z}; e^a = x^b\}$$

$$0 \rightarrow 2\pi i \mathbb{Z} \rightarrow M_{1,x,\mathbb{Z}} \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

$$W_{-3} = \{0\}, \quad W_{-2} = W_{-1} = 2\pi i \mathbb{Z}, \quad W_0 = M_{1,x,\mathbb{Z}}$$

$M_{N,z,\mathbb{Q}}$ est le \mathbb{Q} -espace vectoriel engendré par les colonnes k , $W_{-2n} = \{k \geq n\}$, $F^{-k} \leftrightarrow [0, k]$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\text{Li}_1(z) & 2\pi i & 0 & 0 & 0 \\ -\text{Li}_2(z) & 2\pi i \log z & (2\pi i)^2 & 0 & 0 \\ -\text{Li}_3(z) & \frac{2\pi i (\log z)^2}{2!} & (2\pi i)^2 \log z & (2\pi i)^3 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

$$\text{Li}_k(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^k}$$

Monodromies en 0 et 1 = produit à droite par

$$M_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Structures de Hodge mixtes réelles (d)

$(V, W_\bullet, F^\bullet)$ donne deux bigraduations de $V_{\mathbb{C}}$

$$V_F^{p,q} :=$$

$$F^p \cap W_{p+q} \cap \left(\overline{F^q} \cap W_{p+q} + \sum_{i \geq 0} \overline{F^{q-i+1}} \cap W_{p+q-i} \right)$$

$$V_{\overline{F}}^{p,q} :=$$

$$\overline{F^q} \cap W_{p+q} \cap \left(F^p \cap W_{p+q} + \sum_{i \geq 0} F^{p-i+1} \cap W_{p+q-i} \right)$$

isomorphes quand on passe au gradué $\text{Gr}^W V_{\mathbb{C}}$

$$d = a_{\overline{F}} a_F^{-1} \in \text{Aut } \text{Gr}^W V_{\mathbb{C}}$$

$$(d-1)(V_W^{p,q}) \subset \bigoplus_{r < p, s < q} V_W^{r,s}$$

Gr^W induit une équivalence de catégories de \mathbb{R} -MHS avec la catégorie des espaces vectoriels bigradués munis d'un automorphisme d tel que

$$(d - 1)(E^{p,q}) \subset \bigoplus_{r < p, s < q} E^{r,s}$$
$$\sigma d \sigma^{-1} = d^{-1}$$

où σ est la conjugaison complexe

Algèbre de Lie $\mathcal{L}_{\mathbb{S}}$ et le groupe \mathbb{S}^*

Soit $\mathcal{L}_{\mathbb{S}} = \mathcal{F}(d^{(\cdot,\cdot)})_{\bullet}$ l'algèbre de Lie libre engendrée par les éléments $d^{(-p,-q)}$ de bidegré $(-p, -q)$, $p > 0, q > 0$. L'algèbre de Hopf

$$\mathcal{H}_{\mathbb{S}} := U(\mathcal{F}(d^{(\cdot,\cdot)})_{\bullet})^{\vee},$$

duale graduée de l'algèbre enveloppante $\mathcal{L}_{\mathbb{S}}$. On note \mathbb{S} le schéma en groupe affine associé à $\mathcal{H}_{\mathbb{S}}$, et par \mathbb{S}^* le produit semidirect $\mathbb{S}^* = \mathbb{S} \rtimes (\mathbb{G}_m \times \mathbb{G}_m)$, avec l'action donnée par la bi-graduation.

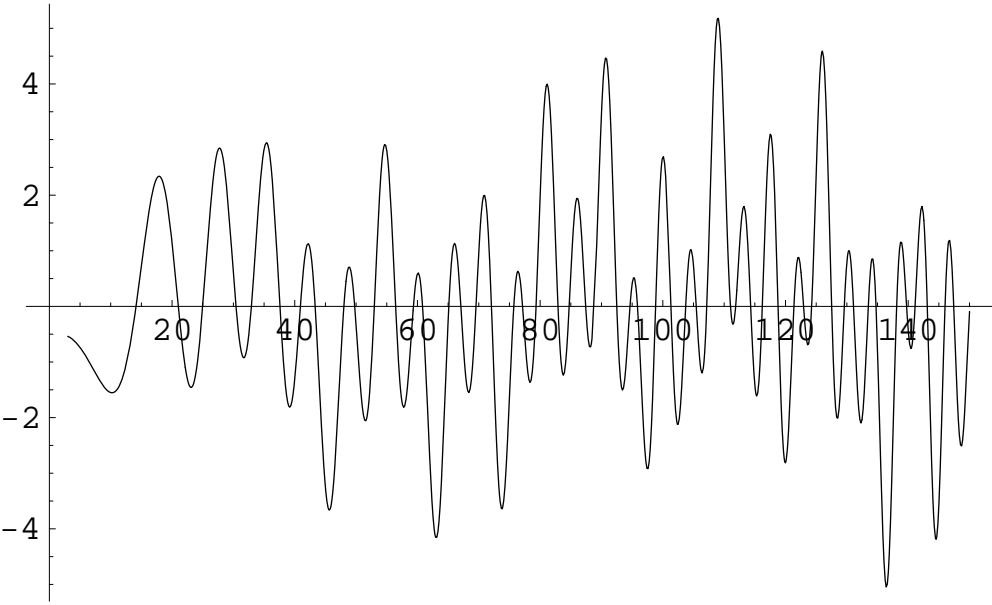
Thm (d) : \mathbb{R} -MHS = $\text{Rep}(\mathbb{S}^* \rtimes_{\sigma} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$

Forme réelle

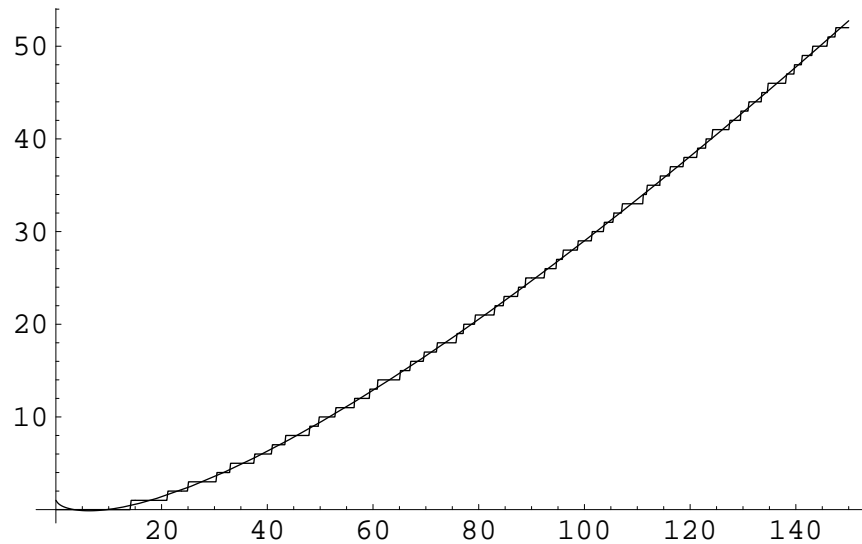
$$(\lambda, \mu) \rightarrow (\bar{\mu}, \bar{\lambda}), \quad d^{(i,j)} \rightarrow -d^{(j,i)}$$

Fonction zêta

$$\zeta(s) = \sum_1^{\infty} n^{-s} = \prod_{\mathcal{P}} (1 - p^{-s})^{-1} .$$



Le signe – :



$$N(E) = \langle N(E) \rangle + N_{\text{osc}}(E)$$

$$\langle N(E) \rangle = \frac{E}{2\pi} \left(\log \frac{E}{2\pi} - 1 \right) + \frac{7}{8} + o(1)$$

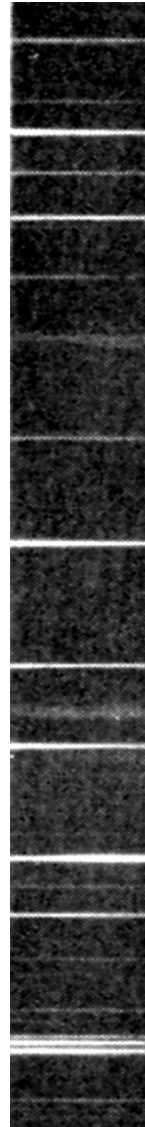
$$N_{\text{osc}}(E) \sim \frac{-1}{\pi} \sum_p \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \frac{1}{p^{m/2}} \sin(m E \log p)$$

$$N_{\text{osc}}(E) \sim \frac{1}{\pi} \sum_{\gamma_p} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \frac{1}{2\text{sh}\left(\frac{m\lambda_p}{2}\right)} \sin(m E T_{\gamma}^{\#})$$

Spectre d'absorption



Absorption

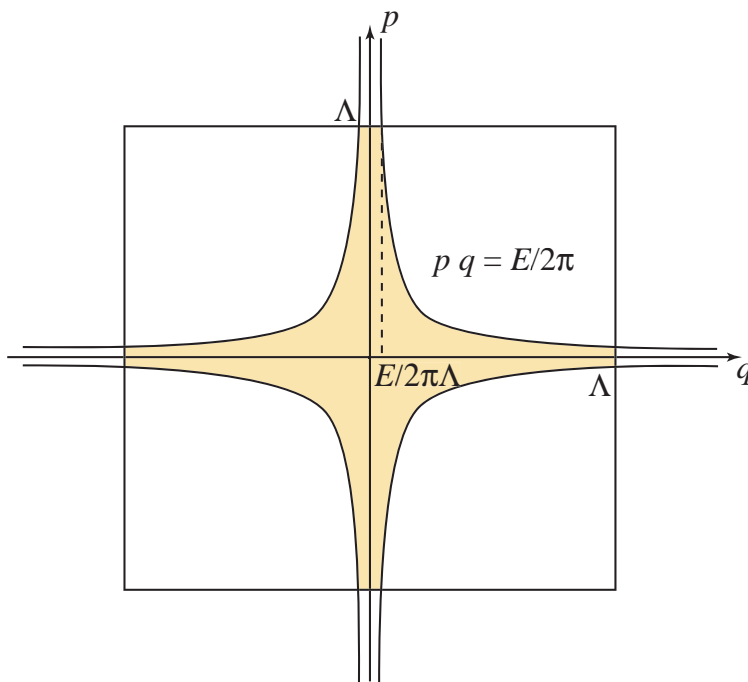


Emission

Les deux sortes de spectres

$\langle N(E) \rangle$ comme volume symplectique
 $|h| \leq E$

$$h(q, p) = 2\pi q p$$



$$\text{Vol}(B_+) = \frac{E}{2\pi} \times 2 \log \Lambda - \frac{E}{2\pi} \left(\log \frac{E}{2\pi} - 1 \right)$$

Calcul détaillé

$$\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})^{\text{even}}$$

$$(U(\lambda)\xi)(q) = \xi(\lambda^{-1}q)$$

$$P_\Lambda = \{f \in L^2(\mathbb{R})^{\text{even}} \mid f(q) = 0, \forall q \text{ avec } |q| > \Lambda\}$$

$$\hat{P}_\Lambda = \mathcal{F}P_\Lambda\mathcal{F}^{-1}, \quad Q_\Lambda = P_\Lambda\hat{P}_\Lambda$$

$$N_E = U(h_E)$$

$$h_E(u) = |u|^{-1/2} \frac{1}{2\pi} \int_{-E}^E |u|^{is} ds,$$

Thm :

$$\text{Tr}(Q_\Lambda N_E) = \frac{4E}{2\pi} \log \Lambda - 2(\langle N(E) \rangle - 1) + o(1),$$

pour $\Lambda \rightarrow \infty$

$$\mathrm{Tr} (Q_\Lambda U(h)) = 2h(1) \log \Lambda + \int' \frac{h(u^{-1})}{|1-u|} d^*u + o(1)$$

$$2h_E(1) \log \Lambda = \frac{1}{2\pi} \times 2E \times 2 \log \Lambda$$

$$\int' \frac{h_E(u^{-1})}{|1-u|} d^*u = -2(\langle N(E) \rangle - 1)$$

$$\langle N(E) \rangle = 1 + \frac{\theta(E)}{\pi}$$

$\theta(E)$ fonction de Riemann-Siegel

$$\theta(E) = -\frac{E}{2} \log \pi + \Im \log \Gamma \left(\frac{1}{4} + i\frac{E}{2} \right)$$

$$f_s(u) = |u|^{is} + |u|^{-is}$$

$$h_E(u^{-1}) = |u|^{1/2} \frac{1}{2\pi} \int_0^E f_s(u) ds,$$

$$\int' f(u) \frac{|u|^{1/2}}{|1-u|} d^*u = (\log \pi + \gamma) f(1) +$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_0^1 f(u) \frac{2u^{1/2}}{(1-u^2)^{1-\varepsilon}} \frac{du}{u} - \frac{1}{\varepsilon} f(1) \right)$$

$$\int' f_s(u) \frac{|u|^{1/2}}{|1-u|} d^*u =$$

$$2(\log \pi + \gamma) - 2\gamma - \frac{\Gamma'}{\Gamma} \left(\frac{1}{4} + i\frac{s}{2} \right) - \frac{\Gamma'}{\Gamma} \left(\frac{1}{4} - i\frac{s}{2} \right)$$

$$\int' h_E(u^{-1}) \frac{1}{|1-u|} d^*u =$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^E \left(2 \log \pi - \frac{\Gamma'}{\Gamma} \left(\frac{1}{4} + i\frac{s}{2} \right) - \frac{\Gamma'}{\Gamma} \left(\frac{1}{4} - i\frac{s}{2} \right) \right) ds$$

$$= -2(\langle N(E) \rangle - 1)$$

Fonctions zêta pour les variétés

Weil + Deligne

Soit Y une variété projective lisse de dimension d sur \mathbb{F}_q et $\pi_{\ell,m}$ l'action de l'endomorphisme de Frobenius de Y sur la cohomologie ℓ -adique $H^m(\bar{Y}, \mathbb{Q}_\ell)$ ($\ell \neq p$) de $\bar{Y} = Y \otimes_{\mathbb{F}_q} \bar{\mathbb{F}}_q$

– Le polynôme

$$P_{\ell,m}(T) = \text{Det}(1 - T \pi_{\ell,m})$$

est indépendant de $\ell \neq p$ et à coefficients entiers.

– Les valeurs propres λ_j obtenues en décomposant $P_m(T) = \prod (1 - \lambda_j T)$ sur \mathbb{C} sont de module

$$|\lambda_j| = q^{m/2}$$

La fonction zêta d'André Weil est

$$Z(T) = \prod_0^{2d} P_m(T)^{(-1)^{m+1}}$$

Variété sur $\mathbb{Q} \rightarrow$ Motif : $H^m(X) \rightarrow$ Zêta

Soit X une variété projective lisse de dimension d sur \mathbb{Q} .

Si X admet une bonne réduction modulo p l'on peut alors parler de la réduction de X en p qui est une variété $X(p)$ sur le corps \mathbb{F}_p et désigner par $P_{m,p}(T)$ le polynôme associé à $X(p)$ et H^m .

$$\zeta_S(s) = \prod_{p \notin S} \frac{1}{P_{m,p}(p^{-s})}$$

$S \subset \Sigma_{\mathbb{K}}$ contient les places archimédiennes, on doit multiplier par

$$\prod_{\Sigma_{\mathbb{K}}^{\infty}} L_{\mathbb{K}_v}(H^*(X \times_{\mathbb{K}} \mathbb{K}_v), s)$$

Facteurs archimédiens $L_{\mathbb{K}_v}(H^*(X \times_{\mathbb{K}} \mathbb{K}_v), s)$

$$H^m(X_v(\mathbb{C})) = \bigoplus_{p+q=m} H^{p,q}(X_v(\mathbb{C}))$$

$$L_{\mathbb{C}}(H^*, s) = \prod_{p,q} \Gamma_{\mathbb{C}}(s - \min(p, q))^{h^{p,q}}$$

$$L_{\mathbb{R}}(H^*, s) =$$

$$\prod_{p < q} \Gamma_{\mathbb{C}}(s - p)^{h^{p,q}} \prod_p \Gamma_{\mathbb{R}}(s - p)^{h^{p,+}} \Gamma_{\mathbb{R}}(s - p + 1)^{h^{p,-}}$$

où $h^{p,\pm}$ est la dimension du $\pm(-1)^p$ -sous-espace propre de l'involution de $H^{p,p}$ induite par la structure réelle et

$$\Gamma_{\mathbb{C}}(s) := (2\pi)^{-s} \Gamma(s), \quad \Gamma_{\mathbb{R}}(s) := 2^{-1/2} \pi^{-s/2} \Gamma(s/2)$$

Représentation $\pi(H^m, u)$

$$\pi(H^m, u) \xi = u^{-p} \bar{u}^{-q} \xi, \quad \forall \xi \in H^{p,q}$$

$$W = \mathbb{C}^* \rtimes_c \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

(deux cocycle c non-trivial)

$$\pi(H^m, w_j) \xi = i^{p+q} w^{-p} \bar{w}^{-q} \sigma(\xi)$$

où σ est l'involution donnée par la structure réelle

Formule de trace de Lefschetz pour l'action sur \underline{B}

(ac + cc + mm)

$$z = \frac{1+m}{2} + is, \text{ et } s \in \mathbb{R},$$

$$\int'_{\mathbb{C}^*} \frac{\text{Trace}(\pi(H^m, u)) |u|_{\mathbb{C}}^z}{|1-u|_{\mathbb{C}}} d^*u = -2 \frac{d}{ds} \Im \log L_{\mathbb{C}}(H^m, z)$$

$$\int'_{\mathcal{W}} \frac{\text{Trace}(\pi(H^m, u)) |u|_{\mathbb{H}}^z}{|1-u|_{\mathbb{H}}} d^*u = -2 \frac{d}{ds} \Im \log L_{\mathbb{R}}(H^m, z)$$

Lemme

Pour $\mathbb{K}_v = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K}_v = \mathbb{C}$ et s réel, on a

$$\int'_{\mathbb{K}_v^*} \frac{|u|^{\frac{1}{2}+is}}{|1-u|} d^*u = -2 \frac{d}{ds} \Im \log \Gamma_{\mathbb{K}_v} \left(\frac{1}{2} + is \right).$$

Pour $n \in \mathbb{Z}$ et $f(\rho) = \inf(\rho, \rho^{-1})$, $\rho > 0$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{in\theta}}{|1 - e^{i\theta}\rho|^2} d\theta = \frac{f(\rho)^{|n|}}{|1 - \rho^2|}, \quad \rho \neq 1$$

$$\frac{1 - \rho^2}{|1 - e^{i\theta}\rho|^2} = \frac{1}{1 - \rho e^{i\theta}} + \frac{1}{1 - \rho e^{-i\theta}} - 1$$

$$h(\rho^{-1}) = \rho^2 h(\rho)$$

Places complexes

Lemme

Pour $\mathbb{K}_v = \mathbb{C}$ et $p, q \in \mathbb{N}$ avec $m = p + q$, $z = \frac{1+m}{2} + is$, et $s \in \mathbb{R}$,

$$\int_{\mathbb{C}^*}' \frac{u^{-p}\bar{u}^{-q}|u|_{\mathbb{C}}^z}{|1-u|_{\mathbb{C}}} d^*u = -2 \frac{d}{ds} \Im \log \Gamma_{\mathbb{C}}(z - \min(p, q))$$

$n = p - q$, on a $\min(p, q) = \frac{m}{2} - \frac{|n|}{2}$, $|u|_{\mathbb{C}} = u\bar{u}$,
 $u^{-p}\bar{u}^{-q} = e^{-in\theta} |u|_{\mathbb{C}}^{\frac{-m}{2}}$ avec $\theta = \text{argument}(u)$

$$\int_{\mathbb{C}^*}' \frac{e^{-in\theta} |u|_{\mathbb{C}}^{\frac{1}{2}+is}}{|1-u|_{\mathbb{C}}} d^*u = -2 \frac{d}{ds} \Im \log \Gamma_{\mathbb{C}}\left(\frac{1}{2} + is + \frac{|n|}{2}\right)$$

Places réelles et quaternions

W groupe de Weil, normalise \mathbb{C}^* dans \mathbb{H}^* , $\mathbb{H} = \mathbb{C} + \mathbb{C}j$, avec $j^2 = -1$ et $j w j^{-1} = \bar{w}$, $\forall w \in \mathbb{C}$.

$$u = w j^\epsilon, \quad w \in \mathbb{C}^*, \quad \epsilon \in \{0, 1\},$$

Cas $m = 2p$ et $h^{p+} = h^{p-}$, paires de valeurs propres de signes opposés, $\pm w^{-p} \bar{w}^{-p}$

Formule de duplication

$$\Gamma_{\mathbb{R}}(z) \Gamma_{\mathbb{R}}(z + 1) = \Gamma_{\mathbb{C}}(z)$$

Cas $h^{p+} \neq h^{p-}$

$$|1 - u|_{\mathbb{H}} = 1 + |w|^2, \quad u = wj,$$

Pour $z = \frac{1}{2} + is$ et $s \in \mathbb{R}$, on a

$$\int_{\mathbb{R}_+^*} \frac{u^z}{1 + u} d^*u = -2 \frac{d}{ds} \Im \log(\Gamma_{\mathbb{R}}(z) / \Gamma_{\mathbb{R}}(z + 1))$$

Atiyah-Bott Lefschetz

$\underline{B} = \mathbb{H}$ comme base, variété sur \mathbb{C} (action à droite)

Atiyah-Bott Lefschetz pour le $\bar{\partial}$ -complexe,

$$\frac{1}{|1 - u|_{\mathbb{H}}}$$

Numérateur $\chi(u)$

$$\frac{\chi(u)}{|1 - u|_{\mathbb{H}}^2} = \frac{1}{|1 - u|_{\mathbb{H}}}$$

Fibré $\wedge^j T_{\mathbb{C}}(\mathbb{H})$ associé à $T_{\mathbb{C}}(\mathbb{H})$ fibré tangent

$$\chi(u) = \sum_j (-1)^j \chi_j(u) = \sum_j (-1)^j \text{trace}(\wedge^j(u))$$

Cela donne le déterminant de $1 - u \in \mathbb{H}$

$$\chi(u) = |1 - u|_{\mathbb{H}}$$

Cas semi-local, formule de trace

$\Gamma_S = \{q \in K^* : |q|_v = 1, \quad \forall v \notin S\}$, $\mathbb{A}_{\mathbb{K},S} = (\prod \mathbb{K}_v)/\Gamma_S$, $C_{\mathbb{K},S} = (\prod \mathbb{K}_v^*)/\Gamma_S$ et $\alpha = \prod_{v \in S} \alpha_v$

Thm (ac)

Soit $h \in \mathcal{S}(C_{\mathbb{K},S})$ alors, pour $\Lambda \rightarrow \infty$, on a

$$\begin{aligned} \text{Tr}(Q_\Lambda U(h)) &= 2h(1) \log \Lambda \\ &+ \sum_{v \in S} \int'_{\mathbb{Q}_v^*} \frac{h(u^{-1})}{|1-u|} d^*u + o(1) \end{aligned}$$

Chaque $\mathbb{K}_v^* \subset C_{\mathbb{K},S}$ par $u \mapsto (1, 1, \dots, u, \dots, 1)$ et f' donnée par la distribution sur \mathbb{K}_v qui prolonge $\frac{du}{|1-u|}$ et dont la transformée de Fourier relative au caractère α_v est nulle en 1.

Cas des variétés, conjectural

W groupe de Weil, $u \rightarrow |u| \in \mathbb{R}_+^*$ module, $W_v \subset W$ groupes locaux. Soit $h \in \mathcal{S}(\mathbb{R}_+^*) \subset \mathcal{S}(W)$, pour $\Lambda \rightarrow \infty$, on a

$$\text{Trace}(Q_\Lambda U(h)) = 2h(1)B_m \log \Lambda + \sum_{v \in \mathcal{S}} \int'_{W_v} \frac{h(|u|) \text{Trace}(\pi_v(H^m, u))}{|1 - u|_{\mathbb{H}_v}} d^*u + o(1)$$

où B_m est le m -ième nombre de Betti de X , et \int' comme ci-dessus.

Serre $\rightarrow B_m$ indépendant de la place v

Formules Explicites (Riemann)

$$\begin{aligned}\pi'(x) &= Li(x) - \sum_{\rho} Li(x^{\rho}) \\ &+ \int_x^{\infty} \frac{du}{u(u^2 - 1) \log u} - \log 2 \\ \pi'(x) &= \pi(x) + \frac{1}{2} \pi(x^{\frac{1}{2}}) + \frac{1}{3} \pi(x^{\frac{1}{3}}) + \dots\end{aligned}$$

Formules Explicites (Weil)

$$\widehat{h}(0) + \widehat{h}(1) - \sum_{\rho} \widehat{h}(\rho) = \sum_v \int_{K_v^*} \frac{h(u^{-1})}{|1 - u|} d^*u$$

Formules Explicites = Formules de Trace (ac + rm + cc + mm)

$$\text{Trace}_{H^1}(h) = \hat{h}(0) + \hat{h}(1) - \sum_v \int_{K_v^*} \frac{h(u^{-1})}{|1-u|} d^*u$$

où le dernier terme $\sum_v \int_{K_v^*} \frac{h(u^{-1})}{|1-u|} d^*u$ est un nombre d'intersection :

$$Z(h) \bullet \Delta$$

$$\begin{aligned} \text{Trace}_{H^1}(h) &= \hat{h}(0) + \hat{h}(1) - \Delta \bullet \Delta h(1) \\ &\quad - \sum_v \int_{(K_v^*, e_{K_v})} \frac{h(u^{-1})}{|1-u|} d^*u \end{aligned}$$

Géométrie Non-Commutative

\leftrightarrow

Théorie des Motifs

Théorie des champs

Espace de dimension z , $: z \rightarrow X_z$ pur

Zêta

Espace des classes d'adèles \rightarrow cas des motifs $H^m(X)$ avec X variété projective lisse

Frobénus en caractéristique 0 = Dual du “temps” (ac+ cc+ mm)

Un espace noncommutatif évolue avec le temps !

$$\sigma_t^\varphi \in \text{Out}(M) = \text{Aut}(M)/\text{Int}(M)$$

est *indépendant* du choix de φ

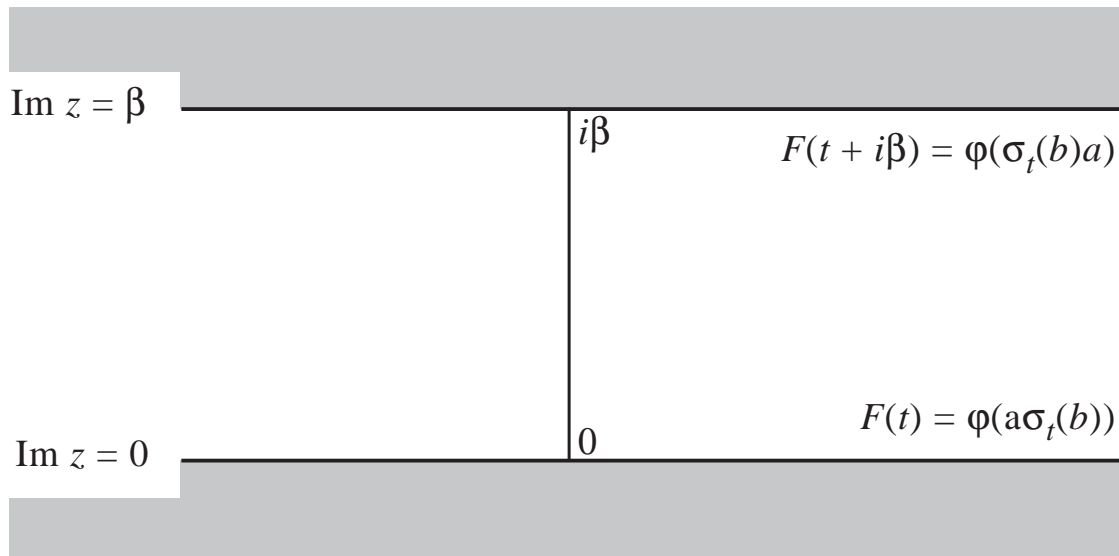
- ↓ Température → Espace classique
- Distillation → Module Cyclique
- Action Duale de \mathbb{R}_+^* sur HC_0 = analogue du Frobénus sur la cohomologie étale ℓ -adique

Thermodynamique des espaces noncommutatifs

La condition KMS

$$\varphi(x^*x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathcal{A}, \quad \varphi(1) = 1.$$

$$\sigma_t \in \text{Aut}(\mathcal{A})$$



$$F_{a,b}(t) = \varphi(a\sigma_t(b)) \quad F_{a,b}(t + i\beta) = \varphi(\sigma_t(b)a)$$

↓ **Température** → **Espace classique**

$$(\mathcal{A}, \varphi) \rightarrow \sigma_t \in \text{Aut}(\mathcal{A})$$

Ω_β espace des états KMS_β de type I_∞

$$\varepsilon(x) = \text{Trace}(\pi_\varepsilon(x) e^{-\beta H}) / \text{Trace}(e^{-\beta H})$$

$$\Omega_\beta \subset \Omega_{\beta'}, \quad \beta \leq \beta'$$

$$\hat{\mathcal{A}} = \mathcal{A} \rtimes_\sigma \mathbb{R}$$

$$\pi_{\varepsilon, H} \left(\int x(t) U_t dt \right) = \int \pi_\varepsilon(x(t)) e^{itH} dt$$

$$\mathbb{R}_+^* \rightarrow \tilde{\Omega}_\beta \rightarrow \Omega_\beta, \quad \lambda(\varepsilon, H) = (\varepsilon, H + \log \lambda)$$

Morphisme de distillation

$$\pi : \hat{\mathcal{A}} \rightarrow C(\tilde{\Omega}_\beta, \mathcal{L}^1)$$

Conoyau du Morphisme de Distillation

On veut une catégorie abélienne contenant celle des algèbres noncommutatives :

Catégorie abélienne des Λ -modules

$$\Lambda = \Delta C = C \Delta, \quad B\Lambda = \mathbb{P}_\infty(\mathbb{C})$$

Λ est la catégorie cyclique

$$\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}^\natural = \bigoplus \mathcal{A}^{\otimes n}$$

La catégorie cyclique Λ

Présentation

$$\delta_j \delta_i = \delta_i \delta_{j-1} \quad \text{for } i < j, \quad \sigma_j \sigma_i = \sigma_i \sigma_{j+1}, \quad i \leq j$$

$$\sigma_j \delta_i = \begin{cases} \delta_i \sigma_{j-1} & i < j \\ 1_n & \text{if } i = j \text{ or } i = j + 1 \\ \delta_{i-1} \sigma_j & i > j + 1. \end{cases}$$

Pour obtenir la catégorie cyclique Λ on rajoute pour chaque n un morphisme $\tau_n : [n] \rightarrow [n]$, tel que

$$\tau_n \delta_i = \delta_{i-1} \tau_{n-1} \quad 1 \leq i \leq n, \quad \tau_n \delta_0 = \delta_n$$

$$\tau_n \sigma_i = \sigma_{i-1} \tau_{n+1} \quad 1 \leq i \leq n, \quad \tau_n \sigma_0 = \sigma_n \tau_{n+1}^2$$

$$\tau_n^{n+1} = 1_n.$$

Distillation :

Λ -module $D(\mathcal{A}, \varphi)$ qui est le conoyau du morphisme cyclique composition de π avec la trace $\text{Tr} : \mathcal{L}^1 \rightarrow \mathbb{C}$

Action Duale :

Spectre de l'action canonique de \mathbb{R}_+^* sur l'homologie cyclique

$$HC_0(D(\mathcal{A}, \varphi))$$

Endomotifs

A est une limite inductive d'algèbres réduites commutatives de dimension finie sur le corps \mathbb{K} et S est un semigroupe d'endomorphismes

$$\rho : A \rightarrow A$$

$$\mathcal{A}_{\mathbb{K}} = A \rtimes S$$

$$\begin{aligned} U_{\rho}^* U_{\rho} &= 1, & U_{\rho} U_{\rho}^* &= \rho(1), & \forall \rho \in S \\ U_{\rho_1 \rho_2} &= U_{\rho_1} U_{\rho_2}, & U_{\rho_2 \rho_1}^* &= U_{\rho_1}^* U_{\rho_2}^*, & \forall \rho_j \in S \\ U_{\rho} x &= \rho(x) U_{\rho}, & x U_{\rho}^* &= U_{\rho}^* \rho(x), & \forall \rho \in S \end{aligned}$$

Foncteur

Endomotif $\rightarrow (\mathcal{A}, \varphi)$ avec action du groupe de Galois absolu.

Exemples typiques :

Endomorphismes d'une variété algébrique (groupe),

$$X_s = \{y \in Y : s(y) = *\}.$$

$$X_{sr} \ni y \mapsto r(y) \in X_s.$$

$$X = \varprojlim_s X_s$$

$$\xi_{su}(\rho_s(x)) = \xi_u(x)$$

Exemple : $\mathbb{G}_m(\mathbb{Q})$, le système BC

Système projectif $X_n = \text{Spec}(A_n)$, où $A_n = \mathbb{Q}[\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}]$ est l'anneau du groupe abélien $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. La limite inductive est l'anneau $A = \mathbb{Q}[\mathbb{Q}/\mathbb{Z}]$ du groupe \mathbb{Q}/\mathbb{Z} . L'endomorphisme ρ_n est donné sur la base canonique $e_r \in \mathbb{Q}[\mathbb{Q}/\mathbb{Z}]$, $r \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, par

$$\rho_n(e_r) = \frac{1}{n} \sum_{ns=r} e_s$$

Interprétation Cohomologique de la réalisation spectrale

$\mathbb{G}_m(\mathbb{Q})$, le système BC $\rightarrow (\mathcal{A}, \varphi)$ avec action du groupe de Galois absolu $\text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$.

Caractère χ de $\text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \rightarrow$ projection p_χ .

Théorème

La représentation de \mathbb{R}_+^* dans

$$\mathcal{M} = HC_0(p_\chi D(\mathcal{A}, \varphi))$$

donne la réalisation spectrale des zéros de la fonction L_χ .

Y. André, *Une introduction aux motifs*, Panoramas et Synthèses, Vol.17, Société mathématique de France, 2005.

S. Bloch, *Function theory of polylogarithms*. Structural properties of polylogarithms, 275–285, Math. Surveys Monogr., 37, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1991.

A. Connes, C. Consani, M. Marcolli, *Noncommutative geometry and motives : the thermodynamics of endo-motives*. math.QA/0512138

P. Deligne, *Structures de Hodge mixtes réelles*. Motives (Seattle, WA, 1991), 509–514, Proc. Sympos. Pure Math., 55, Part 1, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994.

J. P. Serre, *Facteurs locaux des fonctions zêta des variétés algébriques (définitions et conjectures)*. Sémin. Delange-Pisot-Poitou, exp. 19, 1969/70.