

ANALYSE ET GÉOMÉTRIE

Alain CONNES

Membre de l'Institut (Académie des sciences),
professeur au Collège de France

Mots-clés : analyse, géométrie, quantique

La série de cours et séminaires « La géométrie et le quantique » est disponible, en audio et/ou en vidéo, sur le site internet du Collège de France (<http://www.college-de-france.fr/site/alain-connes/course-2016-2017.htm>).

ENSEIGNEMENT

COURS – LA GÉOMÉTRIE ET LE QUANTIQUE

1. LE MODÈLE SPECTRAL

La raison simple pour laquelle la géométrie non commutative est pertinente pour la compréhension de la géométrie de l'espace-temps est le rôle-clé des théories de jauge non abéliennes dans le modèle standard des particules élémentaires et des forces faibles et fortes. Les théories de jauge modifient le groupe de symétrie de la gravitation, c'est-à-dire le groupe des difféomorphismes $\text{Diff}(M)$ de l'espace-temps, en un groupe plus grand \mathcal{G} qui est un produit semi-direct avec le groupe de transformations de jauge de deuxième espèce. La recherche d'une interprétation géométrique de ce groupe en tant que groupe de difféomorphismes d'une variété de dimension supérieure est l'essence de l'idée de Kaluza-Klein. La géométrie non commutative donne une autre piste. En effet, le groupe de difféomorphismes $\text{Diff}(M)$ est le groupe des automorphismes de l'algèbre involutive \mathcal{A} des fonctions lisses sur M , et si l'on remplace \mathcal{A} par l'algèbre non commutative $M_n(\mathcal{A})$ des matrices sur \mathcal{A} on modifie le groupe d'automorphismes de l'algèbre exactement comme l'exige la théorie de jauge non abélienne de groupe $SU(n)$. Le groupe $\text{Inn}(\mathcal{A})$ des automorphismes intérieurs est localement isomorphe au groupe $\text{Map}(M, G)$ des applications de M dans le petit groupe de jauge $G = SU(n)$ et la suite exacte

$$1 \rightarrow \text{Inn}(\mathcal{A}) \rightarrow \text{Aut}(\mathcal{A}) \rightarrow \text{Out}(\mathcal{A}) \rightarrow 1$$

est identique à

$$1 \rightarrow \text{Map}(M, G) \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \text{Diff}(M) \rightarrow 1.$$

Le paradigme géométrique riemannien est étendu au monde non commutatif de manière spectrale. Un espace géométrique est donné par un triplet spectral $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$ où son algèbre de coordonnées \mathcal{A} et son « élément de longueur inverse » D qui spécifie la métrique, agissent dans le même espace de Hilbert \mathcal{H} . Le nouveau paradigme géométrique des triplets spectraux représente le discret et le continu sur la même scène qui est l'espace de Hilbert. Ce paradigme permet de détecter la structure fine de l'espace-temps. Le modèle standard couplé à la gravitation apparaît comme la gravitation pure sur le produit du continu ordinaire par un espace fini F .

- L'algèbre \mathcal{A}_F correspond au groupe de jauge.
- L'espace de Hilbert \mathcal{H}_F correspond aux fermions élémentaires.
- L'opérateur D_F correspond aux couplages de Yukawa.

La matrice de couplage de Yukawa D_F du modèle standard fournit l'élément de longueur inverse pour la géométrie finie $(\mathcal{A}_F, \mathcal{H}_F, D_F)$ qui exhibe la structure fine de l'espace-temps détectée par les particules et les forces découvertes jusqu'ici.

1.1 Variables discrètes + non-commutativité engendrent le continu

Un grand avantage de la présentation non commutative est l'économie du codage. Cette économie est familière dans la langue écrite où l'ordre des lettres est si important. L'algèbre des coordonnées est engendrée par l'algèbre finie \mathcal{A}_F et par un symbole de ponctuation « Y » de nature K -théorique, qui est unitaire avec $Y^4 = 1$. La non-commutativité du système obtenu permet de sortir du cadre algébrique de dimension finie et d'engendrer le continu. Il permet d'écrire un analogue supérieur des relations de commutation qui quantifie le volume et encode toutes les géométries spinorielles de dimension 4 comme représentations irréductibles de ces relations (voir § 3.3). Afin de comprendre comment des variables discrètes qui ne commutent pas engendrent le continu, considérons un exemple plus simple celui de la sphère S^2 . On part de l'algèbre involutive $\langle M_2(\mathbb{C}), Y \rangle$ produit libre de l'algèbre des matrices $M_2(\mathbb{C})$ par un élément $Y = Y^*$, $Y^2 = 1$ tel que $\langle Y \rangle = 0$ où $\langle Y \rangle = 0$ est la trace de Y . Plus précisément tout élément T d'une algèbre contenant $M_2(\mathbb{C})$ s'écrit $T = \sum t_{ij} e_{ij}$, où les e_{ij} sont les unités matricielles et les t_{ij} sont dans le commutant $t_{ij} \in M_2(\mathbb{C})'$. La trace est la somme des éléments diagonaux $\langle T \rangle = t_{11} + t_{22}$.

Lemme 1.1 *La C^* -algèbre complétion de $\langle M_2(\mathbb{C}), Y \rangle$ pour la norme*

$$\|x\| := \|\sup_{\pi} \|\pi(x)\|\|$$

où π parcourt les représentations hilbertiennes est isomorphe à l'algèbre $C(S^2, M_2(\mathbb{C}))$ des fonctions continues sur la sphère S^2 à valeurs matricielles.

1.2. Action spectrale

Nous avons montré avec A. Chamseddine que la gravitation pure sur l'espace associé à l'algèbre non commutative $M_n(\mathcal{A})$ des matrices sur \mathcal{A} donne la théorie de la gravitation d'Einstein couplée à celle de Yang-Mills pour le groupe de jauge $SU(n)$. Le potentiel de Yang-Mills apparaît comme la partie intérieure de la métrique de même que le groupe de jauge (de deuxième espèce) apparaît comme le groupe

des difféomorphismes intérieurs. La fonctionnelle d'action, appelée « action spectrale », est une fonction de D de la forme $\text{Tr}(f(D^2/\Lambda^2))$ plus un terme fermionique.

1.2.1. Courbure

Les invariants géométriques locaux impliquant la courbure Riemannienne sont obtenus dans le cas non-commutatif en considérant le développement de la chaleur

$$\text{Tr}(ae^{-tD^2}) \sim_{t \searrow 0} \sum_{n \geq 0} a_n(a, D^2) t^{-\frac{d+n}{2}}, \quad a \in \mathcal{A},$$

où d est la dimension de la géométrie. L'action spectrale en $d = 4$ dans le cas ci-dessus est de la forme : Λ^4 Terme cosmologique + Λ^2 Action d'Einstein-Hilbert + action de Yang-Mills + terme en C^2 + terme topologique + $\mathfrak{o}(\Lambda^{-1})$, où C est la courbure de Weyl.

1.2.2. Semigroupe des perturbations $\text{Pert}(\mathcal{A})$

Au départ la compréhension des potentiels de jauge imitait le calcul différentiel et les potentiels de jauge étaient construits sous la forme

$$A = \sum a_i [D, b_i], \quad a_i, b_i \in \mathcal{A}$$

Nous avons en fait compris [11] les perturbations $D \mapsto D + A$ comme l'action d'un semigroupe $\text{Pert}(\mathcal{A})$ de *perturbations intérieures* qui ne dépend que de l'algèbre involutive \mathcal{A} et contient le groupe unitaire de \mathcal{A} . Plus précisément :

(i) Les éléments auto-conjugués de $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}^{\text{op}}$ forment un semigroupe $\text{Pert}(\mathcal{A})$ pour la multiplication.

(ii) Le semigroupe $\text{Pert}(\mathcal{A})$ agit sur D par la transformation

$$D \mapsto D' = {}^A D = \sum a_j D b_j = D + \sum a_j [D, b_j]$$

(iii) La transitivité des perturbations (*i.e.* une perturbation de perturbation est une perturbation) correspond à la loi de semigroupe de $\text{Pert}(\mathcal{A})$: ${}^{A'}({}^A D) = {}^{(A'A)}D$.

1.3. Origine du paradigme de géométrie spectrale : KO -homologie

La propriété fondamentale d'une variété n'est pas la dualité de Poincaré en homologie ordinaire, mais la dualité de Poincaré dans la théorie plus fine appelée KO -homologie. Le résultat clé, dû à D. Sullivan (voir [1], épilogue), est qu'un fibré PL est la même chose qu'une fibration sphérique munie d'une KO -orientation. On l'applique à la fibration sphérique construite par Spivak comme substitut du fibré normal. La classe fondamentale en KO -homologie est représentée par l'opérateur de Dirac et contient toutes les informations sur les classes Pontrjagin de la variété (celles-ci ne sont pas du tout déterminées par son type d'homotopie : dans le cas simplement connexe, seule la classe de signature est fixée par le type d'homotopie). De plus le cadre Hilbertien est le bon pour développer la K -homologie qui est la théorie duale de la K -théorie, comme l'ont montré dans les années 1970, Atiyah [2], Singer [3], Brown-Douglas-Fillmore, Mischenko, Voiculescu et Kasparov. Pour la géométrie on a besoin du raffinement $K \rightarrow KO$, *i.e.* de structure réelle.

1.3.1. Structure réelle J

Une structure réelle est donnée par un opérateur anti-unitaire J agissant dans \mathcal{H} et qui vérifie

$$[a, JbJ^{-1}] = 0, \quad \forall a, b \in \mathcal{A}$$

Dans le cas pair l'opérateur de chiralité γ joue aussi un rôle important et vérifie $\gamma^2 = 1, \gamma\mathcal{A}\gamma^{-1} = \mathcal{A}$. On considère γ et J comme des décorations du triplet spectral et on continue à parler de « triplet ». On a les relations de commutation suivantes entre D, J et γ

$$J^2 = \varepsilon, DJ = \varepsilon'JD, \quad J\gamma = \varepsilon''\gamma J, \quad D\gamma = -\gamma D$$

Les valeurs des trois signes $\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon''$ dépendent de la dimension en KO -théorie qui est un entier n défini modulo 8 :

n	0	1	2	3	4	5	6	7
ε	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1
ε'	1	-1	1	1	1	-1	1	1
ε''	1		-1		1		-1	

1.3.2. Les trois rôles de J

- En physique J est l'opérateur de conjugaison de charge.
- Grâce à J on définit un cycle en KO -homologie pour l'algèbre $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}^{\text{op}}$ et une forme d'intersection : $K(\mathcal{A}) \otimes K(\mathcal{A}^{\text{op}}) \rightarrow \mathbb{Z}$.
- La condition $[a, JbJ^{-1}] = 0$ relie étroitement J à la théorie de Tomita qui en présence d'un vecteur cyclique et séparateur conjugue l'algèbre et son commutant.

$$[a, b^{\text{op}}] = 0, \quad \forall a, b \in \mathcal{A}, b^{\text{op}} := Jb^*J^{-1}.$$

1.3.3. Dimension métrique et KO -dimension

La dimension métrique d est définie à partir de la croissance asymptotique du spectre de l'élément de longueur inverse D : ds est d'ordre $1/d$. Dans le cas classique des variétés spinorielles, la dimension métrique détermine l'entier modulo 8 qui apparaît dans la table. Pour des espaces plus généraux les deux notions de dimension deviennent indépendantes car il existe des espaces dont la dimension métrique est zéro mais de KO -dimension arbitraire.

2. INTERACTION AVEC LA RÉALITÉ

Pendant une longue période avant la découverte d'une raison conceptuelle qui explique la nature exacte de la non-commutativité de l'espace-temps (voir § 3.3), notre approche pour déterminer la structure de l'espace fini $(\mathcal{A}_F, \mathcal{H}_F, D_F)$ a été un dialogue avec les résultats expérimentaux en reliant l'élément de longueur aux forces

connues et en suivant la stratégie explicitée par B. Riemann dans sa leçon sur les fondements de la géométrie :

Il faut donc que la réalité sur laquelle est fondé l'espace forme une variété discrète, ou que le fondement des rapports métriques soit cherché en dehors de lui, dans les forces de liaison qui agissent en lui. La réponse à ces questions ne peut s'obtenir qu'en partant de la conception des phénomènes, vérifiée jusqu'ici par l'expérience, et que Newton a prise pour base, et en apportant à cette conception les modifications successives, exigées par les faits qu'elle ne peut pas expliquer.

2.1. 1998-2006

Le premier modèle construit avec Chamseddine en 1996 [4], n'était pas compatible avec les oscillations de neutrinos constatées en 1998 à Kamiokande. Nous avons réalisé en 2006 [5] que l'obstruction à inclure les oscillations du neutrino était naturellement éliminée en abandonnant l'égalité entre la dimension métrique et la KO -dimension. Quand cette dimension est ajustée à 2 modulo 8 grâce à la liberté sur la géométrie de l'espace fini F tout se met en place et on trouve de plus :

- Le mécanisme « seesaw » qui donne une masse très petite aux neutrinos.
- Que l'action fermionique devient un Pfaffien ce qui résout le problème du « fermion doubling ».

2.2. Structure fine

Pour comprendre comment choisir l'espace fini de KO -dimension 6, nous avons classifié avec A. Chamseddine [6, 7], les représentations irréductibles de dimension finie des relations correspondantes entre \mathcal{A}_F , J et γ . Parmi les choix de KO -dimension 6 on trouve (avec \mathbb{H} l'algèbre des quaternions) :

$$\mathcal{A}_F = M_2(\mathbb{H}) \oplus M_4(\mathbb{C}),$$

agissant dans

$$\mathrm{Hom}(\mathbb{H}^2, \mathbb{C}^4) \oplus \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^4, \mathbb{H}^2) = 16 + \overline{16}$$

L'anti-unitaire J interchange 16 et $\overline{16}$. Mais nous n'avons aucun résultat d'unicité. De plus les deux composantes simples de \mathcal{A}_F n'ont pas les mêmes dimensions réelles

$$\dim_{\mathbb{R}}(M_2(\mathbb{H})) = 16, \quad \dim_{\mathbb{R}}(M_4(\mathbb{C})) = 32.$$

2.3. 2008-2012

La deuxième irruption de la réalité est intervenue vers 2008 quand il est devenu clair que la masse du boson de Brout-Englert-Higgs n'était pas compatible avec la restriction (que $m_H \succeq 170$ Gev) imposée par la validité du modèle standard jusqu'à l'échelle d'unification.

En 2012 plusieurs auteurs, indépendamment de l'approche spectrale, ont montré comment l'on peut stabiliser le modèle standard à l'échelle d'unification en lui rajoutant un champ scalaire fortement couplé et le rendre compatible avec la masse expérimentale du boson de Brout-Englert-Higgs.

Nous avons montré dans [10] que l'incompatibilité entre le modèle spectral et la valeur expérimentale de la masse du boson de Brout-Englert-Higgs était résolue par la présence d'un champ scalaire fortement couplé qui était déjà présent dans le modèle spectral [8], et que nous avons négligé dans nos calculs. Ce champ scalaire modifie substantiellement l'analyse du groupe de renormalisation et rétablit la compatibilité du modèle spectral avec la valeur expérimentale de la masse du boson de Brout-Englert-Higgs. Cet épisode où nous avons ignoré le champ scalaire qui était déjà présent dans notre article [8] de 2010, montre bien à quel point il est important de prendre en compte tous les aspects du modèle spectral. En particulier, la classification des espaces finis, conduit directement à prendre au sérieux l'algèbre $M_2(\mathbb{H}) \oplus M_4(\mathbb{C})$.

Nous avons montré en collaboration avec A.H. Chamseddine et W.D. van Suijlekom, que ceci conduit à une extension du modèle standard en un modèle de Pati-Salam [11-13].

3. LA GÉOMÉTRIE ET LE QUANTIQUE

Nous avons découvert dans [14] un analogue géométrique des relations de commutation de Heisenberg $[p, q] = i\hbar$ qui donne une explication conceptuelle de l'algèbre $M_2(\mathbb{H}) \oplus M_4(\mathbb{C})$. Le rôle du moment p est joué par l'opérateur de Dirac, qui représente l'inverse de l'élément de longueur ds familier en géométrie Riemannienne

$$ds = \bullet \text{---} \bullet$$

3.1. Équation géométrique de Heisenberg

Le rôle des variables de position q dans l'analogie des relations de commutation $[p, q] = i\hbar$ a pris du temps à émerger.

La réponse consiste à combiner les variables de position de la même manière que l'opérateur de Dirac combine les composantes du moment, en utilisant l'algèbre de Clifford. En fait cela rétablit la symétrie entre KO -homologie et K -théorie (on verra plus tard comment passer à la KO -théorie) et on quantifie les deux côtés.

Fixons une représentation irréductible de $n + 1$ matrices gamma Γ_A , $0 \leq A < n$,

$$\Gamma_A \in M_s(\mathbb{C}), \quad \{\Gamma_A, \Gamma_B\} = 2\delta_{AB}, \quad (\Gamma_A)^* = \Gamma_A$$

On note $C_+ \subset M_s(\mathbb{C})$ la sous-algèbre réelle engendrée par les Γ_A . Soit $Y \in \mathcal{A} \otimes C_+$ avec

$$Y = Y^A \Gamma_A, \quad Y^2 = 1, \quad Y^* = Y \quad (1)$$

L'analogie géométrique de la relation de commutation de Heisenberg prend la forme

$$\frac{1}{n!} \langle Y [D, Y]^n \rangle = \gamma \quad (2)$$

où n est pair, et $\langle T \rangle$ est la notation pour la trace *normalisée* de $T = T_{ij}$ par rapport à l'algèbre de matrices $M_s(\mathbb{C})$ ($1/s$ fois la somme des s éléments diagonaux T_{ii}). On suppose que D et γ commutent avec $M_s(\mathbb{C})$ et que $Y = Y^A \Gamma_A$ vérifie (1).

Théorème 3.1. *Soit M une variété Riemannienne compacte spinorielle de dimension paire n et $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$ le triplet spectral associé. Alors une solution de l'équation géométrique de Heisenberg existe si et seulement si M est une réunion disjointe de sphères de volume unité. Sur chacune des composantes connexes la condition de volume unité est la seule contrainte sur la métrique Riemannienne.*

3.2. Quantification du volume

Cette équation (2), en supposant que les valeurs propres de D croissent comme en dimension n implique que le volume, exprimé comme le terme principal de la formule asymptotique de Weyl est un entier, car il coïncide, à normalisation près, avec l'indice

$$\langle [D], [e - 1/2] \rangle \in \mathbb{Z}$$

de l'opérateur D accouplé à la classe $[e - 1/2] \in K_0(\mathcal{A})$ définie par

$$[e - 1/2] := [e] - s/2[1_{\mathcal{A}}] \in K_0(\mathcal{A}), \quad e = (1 + Y)/2$$

Cela résulte de la formule de l'indice local [18] mais on n'a pas besoin d'hypothèse technique car les composantes du caractère de Chern $\text{Ch}_m([e - 1/2])$, sont nulles pour $m < n$ ce qui permet d'utiliser la formule locale ([17], [19]) pour la classe de Hochschild du cocycle cyclique donnant l'indice.

3.2.1. Bicomplexe (b, B)

Soit \mathcal{A} une algèbre, son homologie cyclique est définie à partir du bicomplexe (b, B) , $b^2 = 0$, $B^2 = 0$, $bB = -Bb$ avec les notations suivantes :

$$\underline{\mathcal{A}} := \mathcal{A} / \mathbb{C}1, \quad \underline{\mathcal{C}}_n(\mathcal{A}) := \mathcal{A} \otimes \underline{\mathcal{A}} \otimes \cdots \otimes \underline{\mathcal{A}}$$

$$b(a_0 \otimes \cdots \otimes a_n) := \sum_0^{n-1} (-1)^j a_0 \otimes \cdots \otimes a_j a_{j+1} \otimes \cdots \otimes a_n + (-1)^n a_n a_0 \otimes \cdots \otimes a_{n-1}$$

$$B(a_0 \otimes \cdots \otimes a_n) := \sum_0^n (-1)^{nj} 1 \otimes a_j \otimes a_{j+1} \otimes \cdots \otimes a_{j-1}$$

3.2.2. Ch. en homologie cyclique

Soient $\lambda_1 = -2$ et λ_k tels que $(2k+1)\lambda_k + \frac{1}{2}\lambda_{k+1} = 0$ pour $k \geq 1$. Pour $e \in \mathcal{A}$ avec $e^2 = e$ on pose $\text{Ch}_0(e) = e \in \underline{\mathcal{C}}_0(\mathcal{A})$ et,

$$\text{Ch}_{2k}(e) = \lambda_k \times (e - \frac{1}{2}) \otimes e \otimes e \otimes \cdots \otimes e \in \underline{\mathcal{C}}_{2k}(\mathcal{A}), \quad \forall k > 0$$

On a

$$b(e - \frac{1}{2}) \otimes e \otimes e \otimes \cdots \otimes e = \frac{1}{2}(1 \otimes e \otimes e \otimes \cdots \otimes e)$$

$$B(e - \frac{1}{2}) \otimes e \otimes e \otimes \cdots \otimes e = B(e \otimes e \otimes e \otimes \cdots \otimes e) = (2k+1)(1 \otimes e \otimes e \otimes \cdots \otimes e)$$

Comme $(2k+1)\lambda_k + \frac{1}{2}\lambda_{k+1} = 0$ on obtient un cycle $\text{Ch}_*(e)$.

3.2.3. Passage aux matrices

On introduit l'opération de trace partielle, pour une algèbre \mathcal{A} (non nécessairement commutative) et l'algèbre $M_s(\mathcal{A}) = M_s(\mathbb{C}) \otimes \mathcal{A}$ des matrices sur \mathcal{A} , on définit

$$\text{tr} : M_s(\mathcal{A}) \otimes M_s(\mathcal{A}) \otimes \cdots \otimes M_s(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \otimes \cdots \otimes \mathcal{A}$$

comme l'application linéaire telle que :

$$\text{tr}\left((a_0 \otimes \mu_0) \otimes (a_1 \otimes \mu_1) \otimes \cdots \otimes (a_m \otimes \mu_m)\right) = \text{Trace}(\mu_0 \cdots \mu_m) a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_m$$

où Trace est la trace ordinaire des matrices. On note ι_k l'opération qui insère 1 à la k -ème place. On a $\text{tr} \circ \iota_k = \iota_k \circ \text{tr}$. Il en résulte que tr passe au quotient :

$$\text{tr} : \underline{C}_n(M_s(\mathcal{A})) \rightarrow \underline{C}_n(\mathcal{A})$$

Les composantes $\text{Ch}_{2k}(e) \in \underline{C}_{2k}(\mathcal{A})$ sont données par

$$\text{Ch}_{2k}(e) = \lambda_k \times \text{tr} \left(\left(e - \frac{1}{2} \right) \otimes e \otimes e \otimes \cdots \otimes e \right), \quad k > 0$$

Cette formule reste valable pour $k = 0$ en remplaçant e par $[e - 1/2]$:

3.2.4. Annulation des $\text{Ch}_m([e - 1/2])$, $m < n$

Les composantes du caractère de Chern $\text{Ch}_m([e - 1/2])$ pour un idempotent $e \in M_s(\mathcal{A})$ (s pair) sont données, avec $Y = 2e - 1$, par :

$$\text{Ch}_m([e - 1/2]) = 2^{-(m+1)} \lambda_k \text{tr}(Y \otimes Y \otimes Y \otimes \cdots \otimes Y) \in \underline{C}_m(\mathcal{A})$$

avec $m = 2k$ pair et le nombre de termes Y égal à $m + 1$.

On travaille dans le complexe réduit, *i.e.* modulo la somme des images des ι_k pour $k > 0$. Le cycle $\text{Ch}_*(e)$ diffère par le (b, B) -cycle $s/2(1, 0, 0, \dots)$.

Théorème 3.2. *Soit \mathcal{A} une algèbre (sur \mathbb{R}) et $Y = \sum Y^A \Gamma_A$ avec $Y^A \in \mathcal{A}$ et $\Gamma_A \in C_+ \subset M_s(\mathbb{C})$, $n + 1$ matrices gamma. On suppose $Y^2 = 1$. Alors pour $e = \frac{1}{2}(1 + Y)$*

$$\text{Ch}_m([e - 1/2]) = 0, \quad \forall m < n.$$

3.2.5. Indice local

La composante ϕ_n de degré n du cocycle $\phi = \text{Ch}^*(D)$ est donnée ([17], [18], [19]) à normalisation près, par le n -cocycle de Hochschild :

$$\tau(a_0, a_1, \dots, a_n) = \int \gamma a_0 [D, a_1] \cdots [D, a_n] D^{-n}, \quad \forall a_j \in \mathcal{A}.$$

La formule de l'indice local implique pour $e = \frac{1}{2}(1 + Y)$, à normalisation près,

$$\langle [D], [e - 1/2] \rangle = \langle \phi_n, \text{Ch}_n([e - 1/2]) \rangle = \langle \tau, \text{Ch}_n([e - 1/2]) \rangle$$

par le théorème d'annulation des $\text{Ch}_m([e - 1/2])$, $m < n$. On a donc, à normalisation près, $\langle \tau, \text{Ch}_n([e - 1/2]) \rangle \in \mathbb{Z}$. De plus comme D commute avec l'algèbre $M_s(\mathbb{C})$

$$\tau \circ \text{tr}(y_0, y_1, \dots, y_n) = s \int \gamma \langle y_0[D, y_1] \cdots [D, y_n] \rangle D^{-n}, \quad \forall y_j \in M_s(\mathcal{A})$$

d'où, avec $Y = 2e - 1$, la formule

$$\langle \tau, \text{Ch}_n([e - 1/2]) \rangle = s \int \gamma \langle Y[D, Y]^n \rangle D^{-n}$$

et, à normalisation près,

$$\int D^{-n} = \int \gamma^2 D^{-n} = \frac{1}{n!} \int \gamma \langle Y[D, Y]^n \rangle D^{-n} = \frac{1}{n!s} \langle \tau, \text{Ch}_n([e - 1/2]) \rangle \in \frac{1}{n!s} \mathbb{Z}.$$

Théorème 3.3. *L'équation de Heisenberg géométrique implique la quantification du volume (à normalisation près)*

$$\int D^{-n} \in \mathbb{N}$$

3.3. KO-équation de Heisenberg

Le théorème montre que l'équation (2) ne donne que des réunions disjointes de sphères. Pour obtenir toutes les variétés spinorielles de dimension 4 on prend en compte la structure réelle J , et on pose, $Y^4 = 1$, $Y^*Y = 1$, ce qui effectue la transition $K \mapsto KO$ mentionnée plus haut. On remplace (1) par (avec la sommation sur $\kappa \in \{\pm 1\}$)

$$Y = Y_\kappa^A \Gamma_{A,\kappa}, \quad Y^4 = 1, \quad Y^*Y = 1, \quad (3)$$

et la compatibilité avec J est donnée par :

$$JY^2 = -Y^2J, \quad [Y, JYJ^{-1}] = 0$$

Le spectre de Y^2 décompose l'espace de Hilbert \mathcal{H} en $\mathcal{H} = \mathcal{H}(+) \oplus \mathcal{H}(-)$, on a

$$Y = Y_+ \oplus Y_-, \quad Y_\pm^2 = \pm 1, \quad Y_\pm^* = \pm Y_\pm, \quad Y_\pm = Y_\pm^A \Gamma_{A,\pm}, \quad C_\pm = C(\Gamma_{A,\pm}).$$

Pour $\kappa \in \{\pm 1\}$ les $\Gamma_{A,\kappa}$ vérifient dans $\mathcal{H}(\kappa)$

$$\{\Gamma_{A,\kappa}, \Gamma_{B,\kappa}\} = 2\kappa \delta_{AB}, \quad (\Gamma_{A,\kappa})^* = \kappa \Gamma_{A,\kappa}$$

On a $Y = Y_+ \oplus Y_- \in C^\infty(M, C_+ \oplus C_-)$ où $C_\pm = C(\Gamma_{A,\pm})$ est engendrée sur \mathbb{R} par les $\Gamma_{A,\kappa}$. Dans $\mathcal{H}(+)$, C_+ commute avec $C'_- = JC_-J^{-1}$ pour prendre en compte la relation $[Y, JYJ^{-1}] = 0$.

On raffine l'équation (2) sous la forme :

$$\frac{1}{n!} \langle Z[D, Z]^n \rangle = \gamma \quad Z = 2EJEJ^{-1} - 1, \quad (4)$$

où E est le projecteur spectral $E_+ \oplus E_-$ pour l'unitaire $Y = Y_+ \oplus Y_-$.

$$E = E_+ \oplus E_- = \frac{1}{2}(1 + Y_+) \oplus \frac{1}{2}(1 + iY_-)$$

$p - q$ mod 8	Cliff $_{p,q}(\mathbb{R})$ $n = p + q$	$p - q$ mod 8	Cliff $_{p,q}(\mathbb{R})$ $n = p + q$
0	$M(2^{n/2}, \mathbb{R})$	1	$M_u(\mathbb{R}) \oplus M_u(\mathbb{R})$ $u = 2^{(n-1)/2}$
2	$M(2^{n/2}, \mathbb{R})$	3	$M(2^{(n-1)/2}, \mathbb{C})$
4	$M(2^{(n-2)/2}, \mathbb{H})$	5	$M_\nu(\mathbb{H}) \oplus M_\nu(\mathbb{H})$ $\nu = 2^{(n-3)/2}$
6	$M(2^{(n-2)/2}, \mathbb{H})$	7	$M(2^{(n-1)/2}, \mathbb{C})$

3.3.1. Géométrie \Rightarrow Modèle standard

En dimension 4, *i.e.* pour 5 matrices gamma représentées de manière irréductible on a (voir table ci-dessus) :

$$C_+ = M_2(\mathbb{H}), \quad C_- = M_4(\mathbb{C})$$

$$Y = Y_+ \oplus Y_- \in C^\infty(M, C_+ \oplus C_-)$$

On retrouve donc exactement les constituants algébriques de notre approche, ceux qui avaient été déduits à la main en utilisant les résultats expérimentaux pour deviner la bonne algèbre !

On suppose $[D, Y^2] = 0$ *i.e.* la compatibilité avec $\mathcal{H} = \mathcal{H}(+) \oplus \mathcal{H}(-)$. On a

$$\langle Z[D, Z]^4 \rangle_+ = \frac{1}{2} \langle Y_+[D, Y_+]^4 \rangle + \frac{1}{2} \langle Y'_-[D, Y'_-]^4 \rangle.$$

avec $Y'_- = iY_-J^{-1}$ et où on se restreint au sous-espace $\mathcal{H}(+)$ où $Y^2 = 1$. La restriction à $\mathcal{H}(-)$ se déduit en utilisant J .

3.3.2. Deux applications $Y_\pm : M \rightarrow \mathbb{S}^4$

On a $Y_\pm : M \rightarrow \mathbb{S}^n$ et (4) devient, à normalisation près,

$$\det(e_\mu^a) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_4 = Y_+^\#(\rho) + Y_-^\#(\rho), \quad (5)$$

où $Y_\pm^\#(\rho)$ est l'image inverse de la forme volume ρ de la sphère.

Dans l'énoncé suivant on suppose les relations algébriques entre $Y_\pm, D, J, C_\pm, \gamma$.

Théorème 3.4 (i) *Dans toute représentation hilbertienne de l'équation (4) où le spectre de D croît comme en dimension 4 le volume (terme principal de la formule asymptotique de Weyl) est quantifié.*

(ii) *Soit M une variété Riemannienne spinorielle orientée compacte de dimension 4. Alors une solution de (5) existe si et seulement si le volume de M appartient à l'invariant $q_M \subset \mathbb{Z}$. De plus q_M contient tout entier > 4 .*

3.3.3. L'invariant $q_M \subset \mathbb{Z}$

Soit $D(M)$ l'ensemble des couples d'applications lisses $\phi_{\pm} : M \rightarrow S^n$ telles que la forme différentielle ω ne s'annule pas sur M (ρ est la forme volume de la sphère S^n) :

$$\phi_+^{\#}(\rho) + \phi_-^{\#}(\rho) = \omega$$

En utilisant [16] on voit que l'on obtient pour ω toutes les formes volume telles que $\int \omega \in q_M$ où, notant $\deg(\phi)$ le degré topologique de ϕ , on définit l'invariant q_M par

$$q_M := \{\deg(\phi_+) + \deg(\phi_-) \mid (\phi_+, \phi_-) \in D(M)\}$$

L'invariant q_M a un sens en toute dimension. Pour $n = 2, 3$, et tout M , il contient tous les entiers suffisamment grands. Le cas $n = 4$ est plus difficile car la ramification est en codimension 2 et pour $n \geq 4$ on a $(n - 2) + (n - 2) \geq n$. Nous avons montré dans [14] que dans le cas spinoriel q_M contient tous les entiers $m > 4$. Cela utilise les résultats fins sur l'existence de revêtements ramifiés de la sphère et de la théorie de l'immersion dus à Smale, Milnor et Poénaru.

RÉFÉRENCES

- [1] MILNOR J., STASHEFF J., « Characteristic Classes », *Annals of Math. Studies*, vol. 76, Princeton, 1974.
- [2] ATIYAH M., « Global theory of elliptic operators », *Proc. Internat. Conf. on Functional Analysis and Related Topics*, University of Tokyo Press, Tokyo, 1970, p. 21-30.
- [3] SINGER I. M., « Future extensions of index theory and elliptic operators », *Prospects in mathematics, Ann. of Math. Studies*, n° 70, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1971, p. 171-185.
- [4] CHAMSEDDINE A. et CONNES A., « The Spectral action principle », *Comm. Math. Phys.* Vol. 186, 1997, p. 731-750.
- [5] CHAMSEDDINE A., CONNES A., MARCOLLI M., « Gravity and the standard model with neutrino mixing », *Adv. Theor. Math.* Vol. 11, 2007, p. 991-1090.
- [6] CHAMSEDDINE A. et CONNES A., « Why the Standard Model », *Jour. Geom. Phys.*, vol. 58, 2008, p. 38-47.
- [7] CHAMSEDDINE A. et CONNES A., « Conceptual explanation for the algebra in the noncommutative approach to the standard model », *Phys. Rev. Lett.*, vol. 99, 2007, p. 191601.
- [8] CONNES A. et CHAMSEDDINE A. H., « Noncommutative Geometry as a Framework for Unification of all Fundamental Interactions including Gravity », *Fortsch. Phys.* vol. 58, 2010, p. 553-600.
- [9] CONNES A. et CHAMSEDDINE A. H., « The uncanny precision of the spectral action », *Comm. Math. Phys.*, vol. 293, 2010, n° 3, p. 867-897.
- [10] CONNES A. et CHAMSEDDINE A. H., « Resilience of the spectral standard model », *Journal of High Energy Physics*, vol. 1209, 2012.
- [11] CHAMSEDDINE A. H., CONNES A. et VAN SUIJLEKOM W. D., « Inner Fluctuations in Noncommutative Geometry without the First Order Condition », *Journal of Geometrics and Physics*, vol. 13, 2013, p. 22-234.
- [12] CHAMSEDDINE A. H., CONNES A. et VAN SUIJLEKOM W. D., « Beyond the Spectral Standard Model: Emergence of Pati-Salam Unification », *Journal of High Energy Physics*, 2013.

- [13] CHAMSEDDINE A. H., CONNES A., et VAN SUIJLEKOM W. D., « Grand Unification in the Spectral Pati-Salam Model », *Journal of High Energy Physics*, 2015.
- [14] CHAMSEDDINE A.H., CONNES A., et MUKHANOV V., « Geometry and the Quantum: Basics » *Journal of High Energy Physics*, vol. 12, 2014.
- [15] CHAMSEDDINE A. H., CONNES A., et MUKHANOV V., « Quanta of geometry: Noncommutative aspects », *Phys. Rev. Lett.*, vol. 114, 2015.
- [16] MOSER J., « On the volume elements on a manifold », *Transaction of the American Mathematical Society*, vol. 120, n° 2, 1965, p. 286-294.
- [17] CONNES A., *Noncommutative geometry*, Academic Press, 1995.
- [18] CONNES A., MOSCOVICI H., « The local index formula in noncommutative geometry », *GAF*, vol. 5, 1995, p. 174-243.
- [19] CAREY A., RENNIE A., SUKOCHEV F., ZANIN D., « Universal measurability and the Hochschild class of the Chern character », *J. Spectr. Theory*, vol. 6, 2016, n° 1, p. 1-41.

CONFÉRENCES

- Octobre 2016, une conférence au Collège de France au colloque de rentrée.
- Mars 2017, trois conférences à Trieste.
- Mars-avril 2017, cinq conférences à Shanghai.
- Juin 2017, une conférence au Collège de France au colloque à la mémoire de J.-C. Yoccoz.

PUBLICATIONS

- CONNES A. et CONSANI C., « Geometry of the scaling site », *Selecta Mathematica*, vol. 23, n° 3, 2017, p. 1803-1850, DOI : 10.1007/s00029-017-0313-y [arXiv: 1603.03191].
- CONNES A. et CONSANI C., « Homological algebra in characteristic one », 2017, <http://arxiv.org/abs/1703.02325> [arXiv: 1703.02325].
- CONNES A., « Geometry and the Quantum », 2017, [arXiv: 1703.02470].
- CONNES A., SUKOCHEV F. et ZANIN D., « Trace theorem for quasi-Fuchsian groups », *Sbornik : Mathematics*, vol. 208, n° 10, 2017, p. 1473-1502, DOI : 10.1070/SM8794 [arXiv:1703.05447v1].
- CONNES A., MCDONALD E., SUKOCHEV F. et ZANIN D., « Conformal trace theorem for Julia sets of quadratic polynomials », *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 2017, p. 1-26, DOI : 10.1017/etds.2017.124.
- CONNES A., « An essay on the Riemann hypothesis », in J. NASH, J. FORBES et M. RASSIAS (dir.), *Open Problems in Mathematics*, Cham, Springer, 2016, p. 225-257, <http://arxiv.org/abs/1509.05576> [arXiv: 1509.05576].
- CONNES A. et CONSANI C., « Absolute algebra and Segal's Γ -rings: Au dessous de $\text{Spec}(\mathbb{Z})^-$ », *Journal of Number Theory*, vol. 162, 2016, p. 518-551, DOI : 10.1016/j.jnt.2015.12.002 [arXiv: 1502.05585].
- CONNES A. et CONSANI C., « Geometry of the arithmetic site », *Advances in Mathematics*, vol. 291, 2016, p. 274-329, DOI : 10.1016/j.aim.2015.11.045 [arXiv: 1502.05580].
- CONNES A. et CONSANI C., « The scaling site », *Comptes Rendus Mathématique : Académie des sciences de Paris*, vol. 354, n° 1, 2016, p. 1-6, DOI : 10.1016/j.crma.2015.09.027 [arXiv: 1507.05818].
- CONNES A. et FATHIZADEH F., « The term a_4 in the heat kernel expansion of noncommutative tori », 2016, <https://arxiv.org/abs/1611.09815>.