NOTES DES MEMBRES ET CORRESPONDANTS ET NOTES PRÉSENTÉES OU TRANSMISES PAR LEURS SOINS

ALGÈBRE. — *Ordres faibles et localisation des zéros de polynomes.* Note (*) de M. **Alain Connes**, présentée par M. Arnaud Denjoy.

Nous avons introduit dans la Note précédente la notion d'ordre faible sur un corps (la condition « $x > 0$, $y > 0$ entraîne $xy > 0$ » est remplacée par $x > 0$, $y > 0$ entraîne $1/[(1/x) + (1/y)] > 0$).

Nous déterminons d'abord les conditions exactes dans lesquelles elle rejoint la notion usuelle.

Puis pour un corps algébriquement clos faiblement ordonné K, ω quelconque, nous énonçons une généralisation d'un théorème, dit d'apolarité, que Grace avait démontré pour un demi-plan du plan complexe.

Extensions fortement réelles. — Soit k un corps ordonné, on vérifie d'abord ceci :

Pour que tout polynome p séparé (i. e. le résultant de p et p' est différent de 0) admette autant de zéros dans la clôture réelle $\bar{k}$ de k que de changements de signes dans k, il faut et il suffit que k soit dense au sens de l'ordre dans $\bar{k}$, c'est-à-dire que k soit un corps de constantes.

Ainsi si k n'est pas un corps de constantes, la condition « p a tous ses zéros dans $\bar{k}$ » (ce qui s'écrit par des inégalités rationnelles sur ses coefficients) n'entraîne même pas que p change de signe dans k.

Nous étudions le problème suivant : Déterminer les extensions K de k (que nous appellerons *fortement réelles*) telles que tout k-ordre faible se prolonge en un ordre fort (au signe près).

Si k est un corps de constantes, dire que $\mathrm{K} = k[x]/p$ est fortement réelle équivaut à dire que p a tous ses zéros dans k.

Si k est un corps de fonctions à m variables sur un corps de constantes, il faut renforcer la condition « p a tous ses zéros dans $\bar{k}$ » par des conditions de ramification de l'extension $\mathrm{K} = k[x]/p$ pour exprimer qu'elle est fortement réelle; plus précisément :

Théorème 1. — *a. Pour qu'une extension* K *de k soit fortement réelle, il faut et il suffit qu'elle soit algébrique et que ses sous-extensions finies soient fortement réelles.*

b. Si k est un corps de constantes (dense dans $\bar{k}$), l'extension $\mathrm{K} = k[x]/p$ est fortement réelle si et seulement si le polynome p a tous ses zéros dans $\bar{k}$.

c. Soit k un corps de fonctions à m variables, c'est-à-dire un corps ordonné muni d'une valuation discrète v, de rang m, telle que l'égalité

$$v(x+y)\ \inf(v(x),\ v(y))$$

ait lieu dès que x et y sont positifs, et que le corps ordonné résiduel Res k *soit un corps de constantes.*

Soit $v = v_m \subset v_{m-1} \subset \ldots \subset v_1 \subset v_0 = k$ *la chaîne des différentes composantes de* v, v_i *la composante de rang* i.

L'extension $K = k[x]/p$ *de* k *est fortement réelle si et seulement si :*

(α) p *a tous ses zéros dans une clôture réelle* $\bar{k}$ *de* k;

(β) *quelle que soit l'extension* $\hat{v}_i$ *de* v_i *à* K, *les indices usuels* e *et* f *de* $\hat{v}_i$ *sur* v_i *vérifient :* $e = 1$, f *quelconque; ou* $e = 2$, $f = 1$.

La nécessité des conditions a et c est une conséquence de la construction suivante :

Soit k un corps ordonné, muni d'une valuation v à valeurs dans le groupe ordonné H, et telle que

$$v(x+y) = \inf(v(x), v(y))$$

quand x et y sont positifs; soit φ la place associée, à valeurs dans le corps ordonné résiduel Res k.

Soient K, $\hat{v}$, $\hat{H}$, $\hat{\varphi}$, Res K des extensions respectives de k, v, H, φ et Res k.

Soit G le groupe quotient $\hat{H}/H$, $g \to \varepsilon_g$ une application de G dans K telle que $\hat{v}(\varepsilon_g) \equiv g$ modulo H.

Toute application $g \to \omega(g)$ de G dans l'ensemble des Res k-ordres faibles de Res K, définit un k-ordre faible ω de K par la condition : $x \in \omega$ quand il existe $\lambda \in k$, $\lambda > 0$ tel que si $\hat{v}(x) \equiv g$ modulo H, l'on ait : $\varphi(\lambda x/\varepsilon_g) \in \omega(g)$.

La conclusion b se déduit du théorème 8 de la Note précédente [1].

Localisation des zéros de polynomes. — Nous montrons l'intérêt d'un ordre faible total sur un corps *algébriquement clos* K extension de Q corps des rationnels.

Soit p un polynome de degré n, à cœfficients dans K.

Nous considérons l'ensemble des zéros de p, comme un sous-ensemble avec répétition de K.

Nous écrirons $z \in Z$ pour dire que z est un zéro de p et nous considérerons Z comme un élément du produit symétrique n-uple $K^{(n)}$ ainsi défini :

$K^{(n)}$ est le quotient du produit K^n par la relation

$$(z_1, \ldots, z_n) = (z'_1, \ldots, z'_n)$$

quand il existe une permutation $i \to i'$ de $1, \ldots, n$ telle que $z_{i'} = z'_i$.

Nous dirons qu'une fonction définie sur $K^{(n)}$ à valeurs dans K est affine (resp. algébrique) si $f(Z) = f(z_1, \ldots, z_n)$ est affine (resp. algébrique) par rapport à chacune des variables z_i.

Les fonctions symétriques usuelles $\Sigma_i = \Sigma z_1 z_2 \ldots z_i$, comme les fonctions symétriques pondérées $\sigma_i = \Sigma_i / C_n^i$, sont des fonctions affines sur $K^{(n)}$.

THÉORÈME 2. — *a. La loi de composition sur* $K^{(n)}$, *notée* $+$, *qui associe à deux éléments* Z *et* Z′ *dont les fonctions symétriques pondérées sont* σ_i, σ'_i *l'élément* $Z'' = Z + Z''$, *tel que* $\sigma''_i = \sum_0^i C_i^j \sigma_j \sigma'_{i-j}$, *est la seule qui vérifie les conditions :*

(α) *Pour toute fonction affine f sur* $K^{(n)}$, *la fonction de* Z, $f(Z + Z')$ *est affine;*

(β) *Soit* $Z = (z_1, \ldots, z_n)$ *et* $Z' = (z, \ldots, z)$, *alors*

$$Z + Z' = (z_1 + z, \ldots, z_n + z);$$

(γ) *Soient* Z, Z′, Z″ *d'éléments* z_i, z'_i, z''_i *tels que* $Z + Z' = Z''$: *quel que soit* $\lambda \in K$,

$$(\lambda z_i) + (\lambda z'_i) = (\lambda z''_i).$$

b. Cette loi fait de $K^{(n)}$ *un groupe, isomorphe au groupe additif de* K^n *par l'intermédiaire d'une application algébrique.*

c. Soit ω *un* Q-*ordre faible total de* K, *la condition*

$$Z' \succeq Z \quad \textit{quand} \quad Z' - Z \succeq 0,$$
$$Z \succeq 0 \quad \textit{quand} \quad Z = (z_1, \ldots, z_n), \quad \textit{avec} \quad z_i \succeq 0\,(\omega) \quad \textit{pour}\ i = 1, 2, \ldots, n$$

fait de $K^{(n)}$ *un groupe ordonné.*

Remarques. — 1° Si dans la condition (α) on remplace le mot affine par algébrique, et si l'on cherche les lois commutatives et associatives de $K^{(n)}$ vérifiant (α), (β), (γ), on obtient :

— pour $n = 1, 2, 3$ la loi est unique et coïncide avec la loi ci-dessus;

— pour $n > 3$, la loi générale dépend de $(p(n) - n)$ paramètres indépendants de K, et vérifie *b* [$p(n)$ nombre de partitions de n éléments].

2° Pour qu'un ordre total Q-linéaire de K vérifie la condition *c* il faut que ce soit un ordre faible.

3° L'application D qui à l'élément Z de $K^{(n)}$, représentant les zéros du polynome p, associe l'élément DZ de $K^{(n-1)}$ qui représente les zéros du polynome dérivé p' est un homomorphisme croissant.

Le contenu du théorème 5 est à peu près le suivant : Sur une clôture algébrique K, ω du corps des rationnels, munie d'un ordre faible total, on sait composer entre eux rationnellement les polynomes de degré n, de manière que si p et q ont tous leurs zéros positifs, le polynome composé vérifie la même propriété.

Considérons la clôture algébrique de Q, c'est-à-dire la plus petite de ses clôtures algébriques.

Le théorème 9 de la Note précédente [1] permet de caractériser les Q-ordres faibles intersections de Q-ordres faibles totaux.

Ceci donne de l'intérêt au corollaire suivant du théorème 5.

COROLLAIRE 3. — *Soit* ω *un* Q-*ordre faible de la clôture algébrique de* Q, *intersection d'ordres faibles totaux.*

Soit K' *son support* $[K' = (\omega - \omega)/\nu$ *avec* $\nu \neq 0$, $\nu \in \omega - \omega]$.

Alors $K'^{(n)}$ *est stable par la loi induite par le groupe* $K^{(n)}$.

Parmi les Q-ordres faibles totaux de la clôture algébrique de Q, les ordres transcendants ont une propriété caractéristique :

Dans les groupes ordonnés associés $K^{(n)}$, pour $n \neq 1$ tout élément positif est une somme finie d'éléments positifs irréductibles ($Z > 0$ est irréductible si une égalité $Z = Z' + Z''$ avec $Z' > 0$, $Z'' > 0$ est impossible).

THÉORÈME 4. — *a. Soit* ω *un* Q-*ordre faible total sur une clôture algébrique* K *de* Q. *Pour qu'un élément positif* $Z = (z_1, \ldots, z_n)$ *de* $K^{(n)}$ *soit irréductible, il faut que l'un des* z_i *soit nul.*

Tout élément $(0, z_2, \ldots, z_n)$ *positif, de* $K^{(n)}$ *est une somme finie d'éléments positifs irréductibles.*

La décomposition n'est pas unique, mais il n'y en a en tout qu'un nombre fini.

b. Si ω *est un* Q-*ordre faible total archimédien, tout élément positif est somme finie d'éléments positifs irréductibles.*

c. Soit ω *un* Q-*ordre faible de la clôture algébrique de* Q. *Pour que la conclusion de b ait lieu, il faut et il suffit que* ω *soit transcendant.*

(*) Séance du 11 août 1969.

(1) *Comptes rendus*, 269, série A, 1969, p. 337.

(2) DIEUDONNÉ, *Théorie analytique des polynomes d'une variable*.

École Normale Supérieure,
45, rue d'Ulm, 75-Paris, 5e.)