

Transparents du premier cours

Deux travaux en collaboration

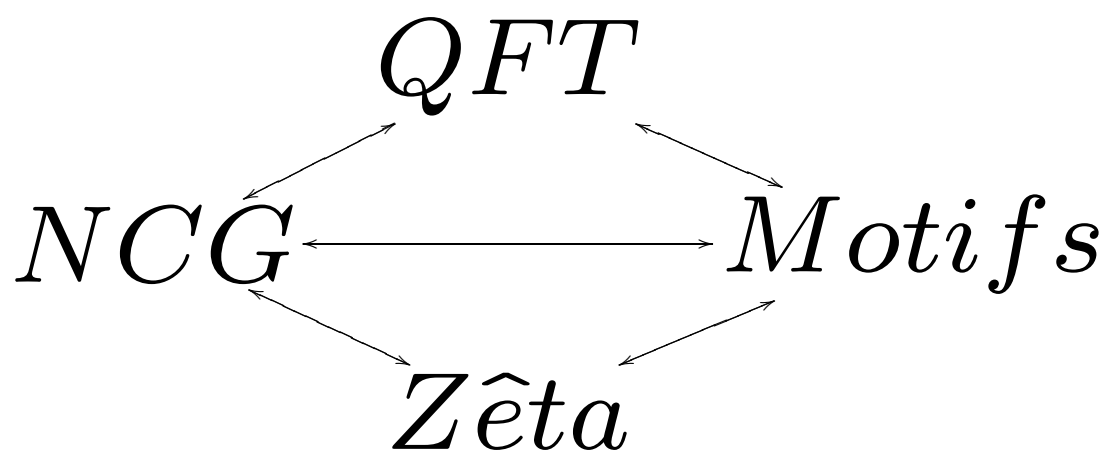
- **Renormalisation et motifs** ac + M. Marcolli
- **Thermodynamique des Endomotifs** ac + C. Consani et M. Marcolli

NCG \cap Motifs

Deux espaces dont la géométrie reste à élucider

– **Espace-Temps**

– **$\text{Spec}(\mathbb{Z}) = \{ \text{ nombres premiers } \}$**



Motifs de Grothendieck

$$L(X, s) = \prod_{i=0}^n L(H^i(X), s)^{(-1)^{i+1}}$$

“Linéariser” la catégorie des variétés projectives lisses sur un corps k

Correspondance de Riemann-Hilbert

Catégorie Tannakienne \rightarrow Groupe de Galois motivique

QFT

I Physique et Géométrie

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

$$\frac{d^2 x^\mu}{dt^2} = -\frac{1}{2} g^{\mu\alpha} (g_{\alpha\nu,\rho} + g_{\alpha\rho,\nu} - g_{\nu\rho,\alpha}) \frac{dx^\nu}{dt} \frac{dx^\rho}{dt}$$

$$S_E[g_{\mu\nu}] = \frac{1}{\ell^2} \int_M r \sqrt{g} d^4x$$

$$S = S_E + S_G + S_{GH} + S_H + S_{Gf} + S_{Hf}$$

II Renormalisation

$$e^{i \frac{S}{\hbar}}$$

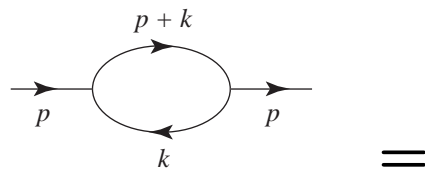
Théorie Perturbative, Dim-Reg + MS

L'Amplitude de probabilité d'une configuration classique A est donnée par la formule de Dirac et Feynman

$$e^{i \frac{S(A)}{\hbar}}$$

$$S(A) = \int \mathcal{L}(A) d^4x$$

Développement perturbatif \rightarrow intégrales divergentes indexées par des graphes de Feynman



$$\int \frac{1}{k^2 + m^2} \frac{1}{((p+k)^2 + m^2)} d^D k$$

Algèbre de Hopf des graphes

(Dirk Kreimer → arbres, ac + dk → graphes)

$$\Delta\Gamma = \Gamma \otimes 1 + 1 \otimes \Gamma + \sum_{\gamma \subset \Gamma} \gamma(i) \otimes \Gamma/\gamma(i)$$

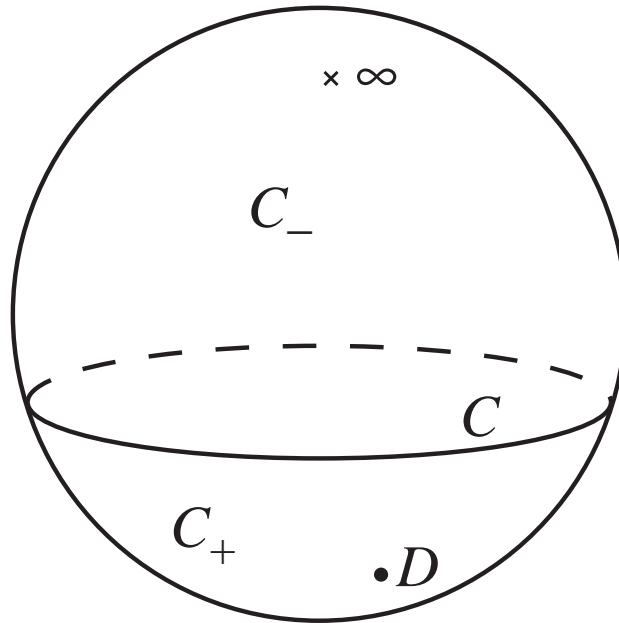
$$\left\{ \begin{aligned} \Delta(\text{square}) &= \text{square} \otimes 1 + 1 \otimes \text{square} \\ &+ 2 \text{triangle} \otimes \text{circle} + 2 \text{triangle} \otimes \text{circle} \\ &+ \text{triangle} \text{triangle} \otimes \text{circle} \end{aligned} \right.$$

Le groupe de Lie d'une théorie est un groupe pro-unipotent,

$$G = \text{Difg}(\mathcal{T})$$

Décomposition de Birkhoff (ac + dk)

$$\gamma(z) = \gamma_-(z)^{-1} \gamma_+(z) \quad z \in C$$



Renormalisation = Birkhoff

(ac + dk, Dim-Reg + MS)

Groupe de Galois Cosmique (ac + mm)

Conjecturé par Cartier (“La folle journée”)

$$\mathcal{H}_c = \mathcal{U}(\mathcal{F}(3, 5, 7, \dots) \bullet)^\vee$$

(Valeurs zêta multiples + (ac + dk))

Correspondance de Riemann-Hilbert $\rightarrow U$

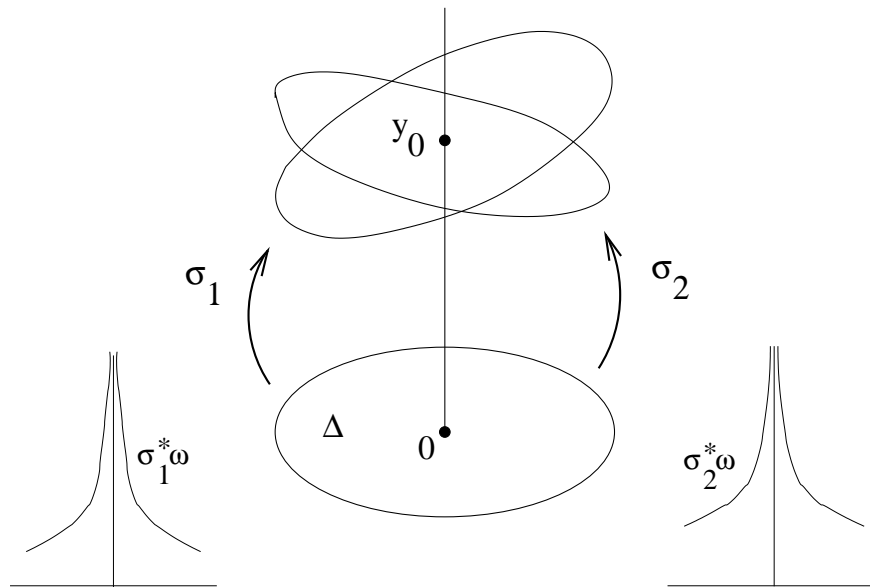
Groupe de symétrie des théories renormalisables

$$U \longrightarrow \text{Difg}(\mathcal{T}) \xrightarrow{\rho} \text{Diff}$$

$$\mathcal{H} = \mathcal{U}(\mathcal{F}(1, 2, 3, \dots) \bullet)^\vee$$

$$U^* \sim G_{\mathcal{M}_T}(\mathcal{O}), \quad \mathcal{O} = \mathbb{Z}[i]\left[\frac{1}{2}\right]$$

Dimensions Complexes \times Normalisation



Singularités Irrégulières (Ramis)

{connections plates équisingulières} =

catégorie des représentations de dimension finie du groupe algébrique affine $U^* = \mathbb{G}_m \rtimes U$

$$\text{Lie}(U) = \mathcal{F}(1, 2, 3, \dots) \bullet$$

Repère Singulier Universel

$$\gamma_U(z, v) = \text{Tr} e^{-\frac{1}{z} \int_0^v u^Y(e) \frac{du}{u}} \in U$$

$$\gamma_U(z, v) = \sum_{n \geq 0} \sum_{k_j > 0} \frac{e(-k_1) e(-k_2) \cdots e(-k_n)}{k_1 (k_1 + k_2) \cdots (k_1 + k_2 + \cdots + k_n)} v^{\sum k_j} z^{-n}$$

Coefficients =

Formule de l'indice locale en NCG

Indice Local en NCG (ac + hm)

$$\varphi_n(a^0, \dots, a^n) = \sum_k b_{n,k} \int a^0 [D, a^1]^{(k_1)} \dots [D, a^n]^{(k_n)} |D|^{-n-2|k|}$$

$$T^{(k+1)} = \frac{D^2 T^{(k)} - T^{(k)} D^2}{k+1}$$

$$b_{n,k} = (-1)^{|k|} \sqrt{2i} \Gamma(|k| + n/2) \\ ((k_1 + 1) \dots (k_1 + k_2 + \dots + k_n + n))^{-1}$$

$$|k| = k_1 + \dots + k_n$$

Dim-Reg \cap NCG

Espaces X_z de dimension z (ac + mm)

t'Hooft-Veltman et Breitenlohner-Maison \Leftrightarrow faire le produit de l'espace-temps euclidien par un triplet spectral X_z de dimension $z \in \mathbb{C}$, $\text{Re}(z) > 0$

$$\mathcal{H}'' = \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}', \quad D'' = D \otimes 1 + \gamma_5 \otimes D'.$$

Spectre de dimensions de X_z est réduit à z .

$$\text{Trace}(e^{-\lambda D^2}) = \pi^{z/2} \lambda^{-z/2}, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}_+^*.$$

NCG

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

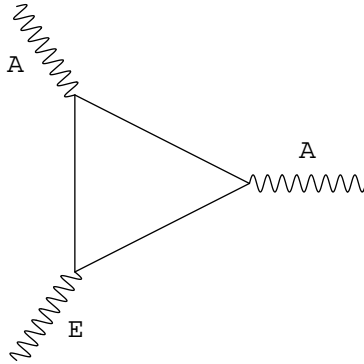


$ds =$ **Propagateur des Fermions**

GRAVITATION \cap QFT

Mètre étalon \rightarrow Longueur d'onde (Krypton (1967) de la lumière
de la ligne orange-rouge dans le spectre du 86Kr puis Césium
(1984) deux niveaux hyperfins de l'état fondamental de $\text{C}133$.

Fermions \rightarrow Géométrie



Fermions	$\psi \in \mathcal{H}$
Symétries internes	Int(A) $f \rightarrow u f u^*$
Bosons de Jauge	Fluctuations internes

Triplet Spectral $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$, $ds = 1/D$

<p>Equation des géodésiques</p>	$\frac{d\psi(t)}{dt} = i D \psi(t)$
<p>Distance géodésique</p>	$d(x, y) = \text{Sup} \{ f(x) - f(y) \mid f \in \mathcal{A}, \ [D, f]\ \leq 1 \}$
<p>Forme volume</p>	$f f ds ^n$
<p>Action d'Einstein</p>	$f f ds ^{n-2}$

Propagateur = $ds \rightarrow$ Action Fermionique

Action Bosonique = Action Spectrale

$N(\Lambda) = \#$ valeurs propres de D dans $[-\Lambda, \Lambda]$.

$$N(\Lambda) = \langle N(\Lambda) \rangle + N_{\text{osc}}(\Lambda)$$

$$\langle N(\Lambda) \rangle = S_{\Lambda}(D) = \sum_{k \in S} \frac{\Lambda^k}{k} \int |ds|^k + \zeta_D(0),$$

$$\zeta_D(s) = \text{Trace}(|D|^{-s})$$

Modèle Standard en couplage minimal

$$\mathcal{L}_E + \mathcal{L}_G + \mathcal{L}_{GH} + \mathcal{L}_H + \mathcal{L}_{Gf} + \mathcal{L}_{Hf}$$

Action Spectrale (ac+ac)

$$\begin{aligned} S = & \int d^4x \sqrt{g} \left(\frac{1}{2\kappa_0^2} R - \mu_0^2 (H^* H) \right. \\ & + a_0 C_{\mu\nu\rho\sigma} C^{\mu\nu\rho\sigma} + b_0 R^2 + c_0 {}^*R^*R + d_0 R_{;\mu}{}^\mu \\ & + e_0 + \frac{1}{4} G_{\mu\nu}^i G^{\mu\nu i} + \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^\alpha F^{\mu\nu\alpha} \\ & \left. + \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} + |D_\mu H|^2 - \xi_0 R |H|^2 + \lambda_0 (H^* H)^2 \right) \end{aligned}$$

Modèle Standard

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_M \otimes \mathcal{A}_F, \quad \mathcal{H} = \mathcal{H}_M \otimes \mathcal{H}_F,$$

$$D = D_M \otimes 1 + \gamma_5 \otimes D_F$$

Espace Fini

$$D_F = \begin{pmatrix} Y & 0 \\ 0 & \bar{Y} \end{pmatrix}$$

Fluctuations Internes \rightarrow Bosons

$$\sum a_i[\gamma_5 \otimes D_F, a'_i] \rightarrow \text{Higgs}$$

$$\sum a_i[D_M \otimes 1, a'_i] \rightarrow \text{Bosons de jauge}$$

Questions ouvertes

1) au dela de SM

Neutrinos massifs

$$\mathcal{A}_F = \mathbb{C} \oplus \mathbb{H} \oplus M_3(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C} \oplus \mathbb{H}_L \oplus \mathbb{H}_R \oplus M_3(\mathbb{C})$$

$$\mathcal{H}_F \rightarrow Q \oplus L \oplus \bar{Q} \oplus \bar{L}$$

$$Q = \begin{pmatrix} u_L & u_R \\ d_L & d_R \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} \nu_L & \nu_R \\ e_L & e_R \end{pmatrix}$$

donne les **spineurs** pour une extension du groupe Spin_4 .

Extension par G_q , $q = j$, $j^3 = 1$.

2) Gravitation

Observables Spectrales (Diff-invariance)

$$\langle \sigma \rangle = \mathcal{N} \int \sigma(D, \psi) e^{-S_\Lambda(D) - \langle \bar{\psi}, D \psi \rangle} D[D] D[\psi] D[\bar{\psi}]$$

→ Modèle de matrices

Contraintes

Equation Polynomiale de degré = dimension

$$U^* [D, U] = 1 \rightarrow \text{géométrie de } S^1$$

$$\sum a_0 [D, a_1] \cdots [D, a_4] = \gamma \rightarrow$$

variétés sphériques (ac + mdv)

Hamiltonien Spectral

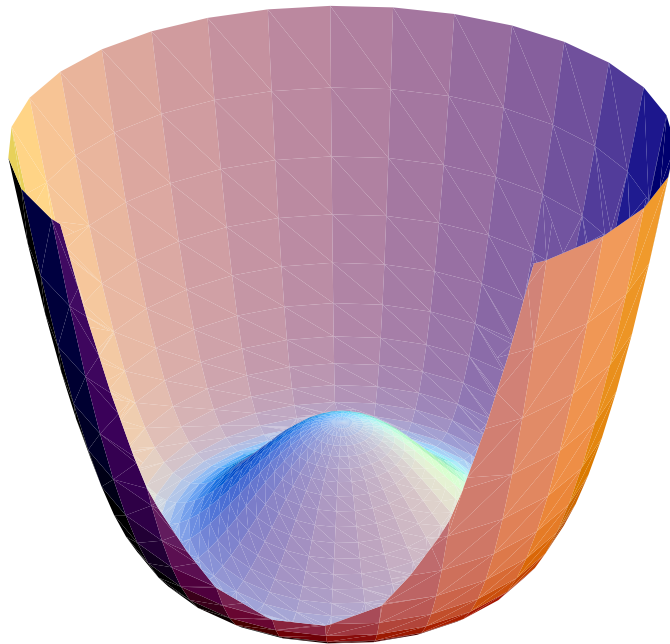
$$ds = \text{Hamiltonien de Dirac} \geq 0$$

Symétries

QFT \rightarrow Groupe de Galois cosmique

Gravité \rightarrow Difféomorphismes

Brisure de symétrie spontanée



Géométrie Noncommutative et Motifs,

Thermodynamique des Endomotifs

(ac+cc+mm)

Motifs d'Artin \rightarrow Endomotifs

Une généralisation des Motifs d'Artin codée
par une algèbre noncommutative \rightarrow espace
noncommutatif + action du groupe de Galois
absolu.

$G_m(\mathbb{Q}) \rightarrow$ **Interprétation cohomologique
des zéros de zêta**

Frobénus en caractéristique 0 = Dual du “temps”

Un espace noncommutatif évolue avec le temps !

$$\sigma_t^\varphi \in \text{Out}(M) = \text{Aut}(M)/\text{Int}(M)$$

est *indépendant* du choix de φ

- ↓ Température → Espace classique
- Distillation → Module Cyclique
- Action Duale de \mathbb{R}_+^* sur HC_0 = analogue du Frobénus sur la cohomologie étale ℓ -adique

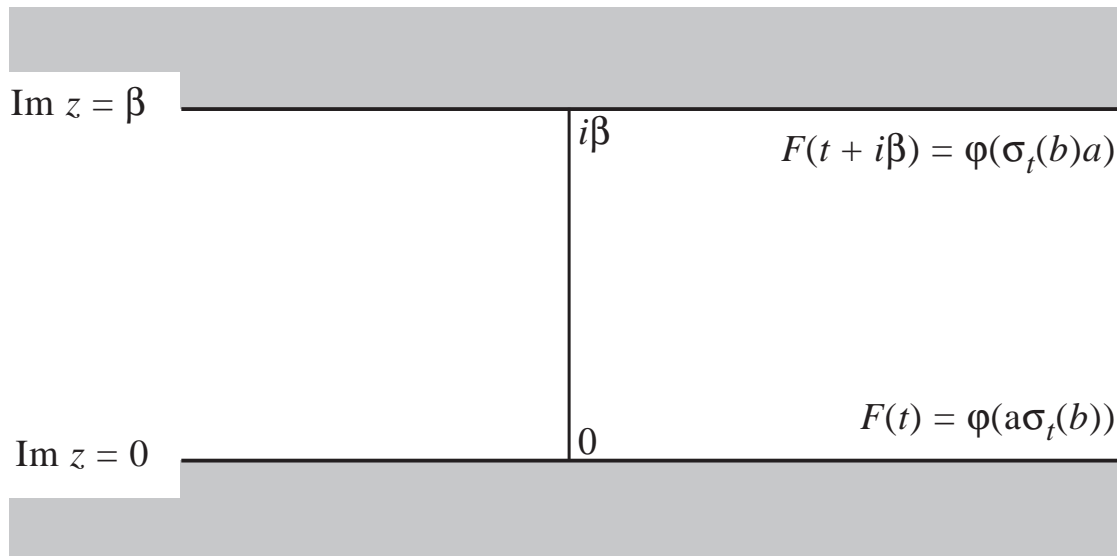
.

Thermodynamique des espaces noncommutatifs

La condition KMS

$$\varphi(x^*x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathcal{A}, \quad \varphi(1) = 1.$$

$$\sigma_t \in \text{Aut}(\mathcal{A})$$



$$F_{a,b}(t) = \varphi(a\sigma_t(b)) \quad F_{a,b}(t + i\beta) = \varphi(\sigma_t(b)a)$$

↓ **Température** → **Espace classique**

$$(\mathcal{A}, \varphi) \rightarrow \sigma_t \in \text{Aut}(\mathcal{A})$$

Ω_β espace des états KMS_β de type I_∞

$$\varepsilon(x) = \text{Trace}(\pi_\varepsilon(x) e^{-\beta H}) / \text{Trace}(e^{-\beta H})$$

$$\Omega_\beta \subset \Omega_{\beta'}, \quad \beta \leq \beta'$$

$$\hat{\mathcal{A}} = \mathcal{A} \rtimes_\sigma \mathbb{R}$$

$$\pi_{\varepsilon, H} \left(\int x(t) U_t dt \right) = \int \pi_\varepsilon(x(t)) e^{itH} dt$$

$$\mathbb{R}_+^* \rightarrow \tilde{\Omega}_\beta \rightarrow \Omega_\beta, \quad \lambda(\varepsilon, H) = (\varepsilon, H + \log \lambda)$$

Morphisme de distillation

$$\pi : \hat{\mathcal{A}} \rightarrow C(\tilde{\Omega}_\beta, \mathcal{L}^1)$$

Conoyau du Morphisme de Distillation

On veut une catégorie abélienne contenant celle des algèbres noncommutatives :

Catégorie abélienne des Λ -modules

$$\Lambda = \Delta C = C \Delta, \quad B\Lambda = \mathbb{P}_\infty(\mathbb{C})$$

Λ est la catégorie cyclique

$$\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}^\natural = \bigoplus \mathcal{A}^{\otimes n}$$

La catégorie cyclique Λ

Présentation (J. L. Loday)

$$\delta_j \delta_i = \delta_i \delta_{j-1} \quad \text{for } i < j, \quad \sigma_j \sigma_i = \sigma_i \sigma_{j+1}, \quad i \leq j$$

$$\sigma_j \delta_i = \begin{cases} \delta_i \sigma_{j-1} & i < j \\ 1_n & \text{if } i = j \text{ or } i = j + 1 \\ \delta_{i-1} \sigma_j & i > j + 1. \end{cases}$$

Pour obtenir la catégorie cyclique Λ on rajoute pour chaque n un morphisme $\tau_n : [n] \rightarrow [n]$, tel que

$$\tau_n \delta_i = \delta_{i-1} \tau_{n-1} \quad 1 \leq i \leq n, \quad \tau_n \delta_0 = \delta_n$$

$$\tau_n \sigma_i = \sigma_{i-1} \tau_{n+1} \quad 1 \leq i \leq n, \quad \tau_n \sigma_0 = \sigma_n \tau_{n+1}^2$$

$$\tau_n^{n+1} = 1_n.$$

Distillation :

Λ -module $D(\mathcal{A}, \varphi)$ qui est le conoyau du morphisme cyclique composition de π avec la trace $\text{Tr} : \mathcal{L}^1 \rightarrow \mathbb{C}$

Action Duale :

Spectre de l'action canonique de \mathbb{R}_+^* sur l'homologie cyclique

$$HC_0(D(\mathcal{A}, \varphi))$$

Endomotifs

A est une limite inductive d'algèbres réduites commutatives de dimension finie sur le corps \mathbb{K} et S est un semigroupe d'endomorphismes

$$\rho : A \rightarrow A$$

$$\mathcal{A}_{\mathbb{K}} = A \rtimes S$$

$$\begin{aligned} U_{\rho}^* U_{\rho} &= 1, & U_{\rho} U_{\rho}^* &= \rho(1), & \forall \rho \in S \\ U_{\rho_1 \rho_2} &= U_{\rho_1} U_{\rho_2}, & U_{\rho_2 \rho_1}^* &= U_{\rho_1}^* U_{\rho_2}^*, & \forall \rho_j \in S \\ U_{\rho} x &= \rho(x) U_{\rho}, & x U_{\rho}^* &= U_{\rho}^* \rho(x), & \forall \rho \in S \end{aligned}$$

Foncteur

Endomotif $\rightarrow (\mathcal{A}, \varphi)$ avec action du groupe de Galois absolu.

Exemples typiques :

Endomorphismes d'une variété algébrique (groupe),

$$X_s = \{y \in Y : s(y) = *\}.$$

$$X_{sr} \ni y \mapsto r(y) \in X_s.$$

$$X = \varprojlim_s X_s$$

$$\xi_{su}(\rho_s(x)) = \xi_u(x)$$

Exemple : $\mathbb{G}_m(\mathbb{Q})$, le système BC

Système projectif $X_n = \text{Spec}(A_n)$, où $A_n = \mathbb{Q}[\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}]$ est l'anneau du groupe abélien $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. La limite inductive est l'anneau $A = \mathbb{Q}[\mathbb{Q}/\mathbb{Z}]$ du groupe \mathbb{Q}/\mathbb{Z} . L'endomorphisme ρ_n est donné sur la base canonique $e_r \in \mathbb{Q}[\mathbb{Q}/\mathbb{Z}]$, $r \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, par

$$\rho_n(e_r) = \frac{1}{n} \sum_{ns=r} e_s$$

Interprétation Cohomologique de la réalisation spectrale

$\mathbb{G}_m(\mathbb{Q})$, le système BC $\rightarrow (\mathcal{A}, \varphi)$ avec action du groupe de Galois absolu $\text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$.

Caractère χ de $\text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \rightarrow$ projection p_χ .

Théorème

La représentation de \mathbb{R}_+^* dans

$$\mathcal{M} = HC_0(p_\chi D(\mathcal{A}, \varphi))$$

donne la réalisation spectrale des zéros de la fonction L_χ .

Extensions nonramifiées $K \rightarrow K \otimes_{\mathbb{F}_q} \bar{\mathbb{F}}_q$

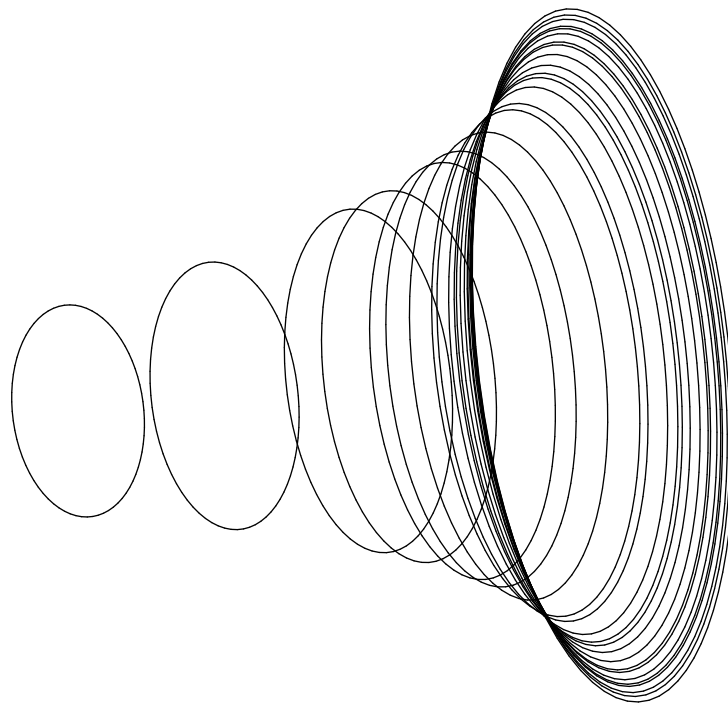
Analogie pour \mathbb{Q} de $K \rightarrow K \otimes_{\mathbb{F}_q} \bar{\mathbb{F}}_q$

Corps Global K	Facteur M
$\text{Mod } K \subset \mathbb{R}_+^*$	$\text{Mod } M \subset \mathbb{R}_+^*$
$K \rightarrow K \otimes_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F}_{q^n}$	$M \rightarrow M \rtimes_{\sigma_T} \mathbb{Z}$
$K \rightarrow K \otimes_{\mathbb{F}_q} \bar{\mathbb{F}}_q$	$M \rightarrow M \rtimes_{\sigma} \mathbb{R}$
Points $C(\bar{\mathbb{F}}_q)$	$\Gamma \subset X_{\mathbb{Q}}$

Le sous-espace $\Gamma_{\mathbb{Q}} \subset X_{\mathbb{Q}} \setminus C_{\mathbb{Q}}$

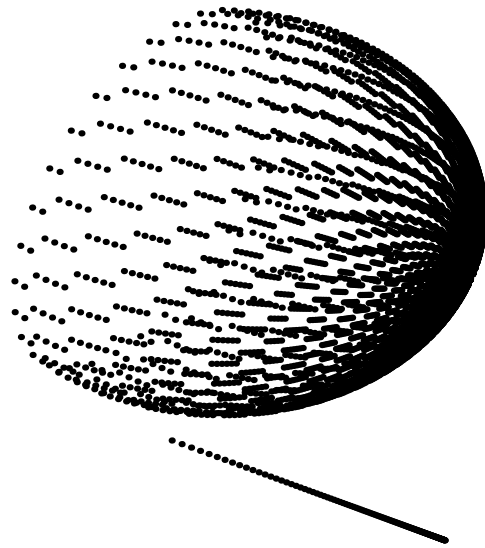
$$\Gamma_{\mathbb{Q}} = \cup_{\Sigma_{\mathbb{Q}}} C_{\mathbb{Q}}[v] \subset X_{\mathbb{Q}}$$

$$[v]_w = 1, \quad \forall w \neq v, \quad [v]_v = 0$$



Log2 Log3 Log5 ... Log(p) ...

Corps Global de caractéristique positive



K est le corps des fonctions sur C à valeurs dans \mathbb{F}_q .

$$\zeta_K(s) = \prod_{\Sigma_k} (1 - q^{-f(v)s})^{-1}$$

$f(v)$ est le degré de la place $v \in \Sigma_k$.

Equation Fonctionnelle $g =$ genre,

$$q^{(g-1)(1-s)} \zeta_K(1-s) = q^{(g-1)s} \zeta_K(s)$$

Cohomologie et Frobénius

$$\zeta_K(s) = \frac{P(q^{-s})}{(1 - q^{-s})(1 - q^{1-s})}$$

où P est le polynôme caractéristique de l'action du **Frobénius** Fr^* dans $H_{\text{et}}^1(\bar{C}, \mathbb{Q}_\ell)$.

L'analogie de la conjecture de Riemann pour les corps globaux de caractéristique p signifie que les valeurs propres de l'action de Frobénius dans H^1 i.e. les nombres complexes λ_j de la factorisation

$$P(T) = \prod (1 - \lambda_j T)$$

sont de module $|\lambda_j| = q^{1/2}$.

Prouvée par Weil (1942) (cas $g = 1$ par Hasse)

Preuve de Weil

La preuve de RH contient deux étapes

- (A) Formules Explicites
- (B) Positivité : $\text{Trace}(Z \star Z') > 0$ sauf si Z est \sim triviale.

$$\#\{C(\mathbb{F}_{q^j})\} = \sum (-1)^k \text{Tr}(\text{Fr}^{*j} | H_{\text{et}}^k(\bar{C}, \mathbb{Q}_\ell))$$

Formules Explicites (Riemann)

$$\pi'(x) = Li(x) - \sum_{\rho} Li(x^{\rho})$$

$$+ \int_x^{\infty} \frac{du}{u(u^2 - 1) \log u} - \log 2$$

$$\pi'(x) = \pi(x) + \frac{1}{2} \pi(x^{\frac{1}{2}}) + \frac{1}{3} \pi(x^{\frac{1}{3}}) + \dots$$

Formules Explicites (Weil)

$$\hat{h}(0) + \hat{h}(1) - \sum_{\rho} \hat{h}(\rho) = \sum_v \int_{K_v^*} \frac{h(u^{-1})}{|1 - u|} d^*u$$

Formules Explicites = Formules de Trace
(ac + rm + cc + mm)

$$\text{Trace}_{H^1}(h) = \hat{h}(0) + \hat{h}(1) - \sum_v \int_{K_v^*} \frac{h(u^{-1})}{|1-u|} d^*u$$

où le dernier terme $\sum_v \int_{K_v^*} \frac{h(u^{-1})}{|1-u|} d^*u$ est un nombre d'intersection :

$$Z(h) \bullet \Delta$$

$$\begin{aligned} \text{Trace}_{H^1}(h) &= \hat{h}(0) + \hat{h}(1) - \Delta \bullet \Delta h(1) \\ &\quad - \sum_v \int_{(K_v^*, e_{K_v})} \frac{h(u^{-1})}{|1-u|} d^*u \end{aligned}$$

Le rôle de la positivité (B) dans la preuve de Weil's est joué par :

Les conditions suivantes sont équivalentes :

- **Toutes les fonctions* L satisfont RH.**
- $\text{Trace}_{H^1}(f \star f^\sharp) \geq 0, \quad \forall f \in \mathcal{S}(C_K).$

$$f \rightarrow f^\sharp, \quad f^\sharp(g) = |g|^{-1} \bar{f}(g^{-1})$$

*(abéliennes)

Preuve de Weil : Correspondances

$$Z : C \rightarrow C, P \rightarrow Z(P)$$

$$U \sim V \Leftrightarrow U - V = (f)$$

$$Z = Z_1 \star Z_2, \quad Z_1 \star Z_2(P) = Z_1(Z_2(P))$$

$$Z' = \sigma(Z)$$

$$d(Z) = Z \bullet (P \times C), \quad d'(Z) = Z \bullet (C \times P)$$

Weil définit la *Trace* d'une correspondance

$$\text{Trace}(Z) = d(Z) + d'(Z) - Z \bullet \Delta$$

où Δ est la correspondance identique et \bullet le nombre d'intersection.

Preuve de la positivité (B)

Dans chaque classe de correspondance / (triviales) on construit Z telle que

$$Z > 0, \quad d(Z) = g$$

On écrit $Z(P) = Q_1 + \cdots + Q_g$, $Z \star Z'(P)$ lieu de $\sum Q_i \times Q_j$,

$$Z \star Z' = d'(Z) \Delta + Y$$

$$Y \bullet \Delta \leq (4g - 4) d'(Z),$$

$$K(P) = \det\{f_i(Q_j)\}^2$$

$$\Delta \bullet \Delta = 2 - 2g$$

$\text{Trace}(Z \star Z') = 2g d'(Z) + (2g - 2) d'(Z) - Y \bullet \Delta$
 $\geq (4g - 2) d'(Z) - (4g - 4) d'(Z) = 2 d'(Z) \geq 0$
où $d'(Z) \geq 0$ car Z est effective.

Correspondances	Classe bivariante Γ
Modulo torsion	$KK(A, B \otimes \text{II}_1)$
Effective	Epimor. de C^* -modules
Composition	produit en KK -théorie
Degré	Indice ponctuel $d(\Gamma)$
$\text{deg } D(P) \geq g \Rightarrow \sim$ effective	$d(\Gamma) > 0 \Rightarrow \exists K, \Gamma + K$ surj.
Ajuster le degré par les correspondances triviales	Fubini sur les fonctions tests
Corr. de Frobénius	Correspondance Z_g
Formule de Lefschetz	Chern bivariant de $Z(h)$

- A. Connes, D. Kreimer, *Renormalization in quantum field theory and the Riemann-Hilbert problem. I. The Hopf algebra structure of graphs and the main theorem*. Comm. Math. Phys. 210 (2000), no. 1, 249–273.
- A. Connes, D. Kreimer, *Renormalization in quantum field theory and the Riemann-Hilbert problem. II. The β -function, diffeomorphisms and the renormalization group*. Comm. Math. Phys. 216 (2001), no. 1, 215–241.
- A. Connes, M. Marcolli, *Anomalies, Dimensional Regularization and Noncommutative Geometry*, in preparation.
- A. Connes, M. Marcolli, *Noncommutative geometry, from quantum fields to motives* (tentative title), book in preparation. To appear as a co-publication of the American Mathematical Society, Colloquium Publications Series, and Hindustan Book Agency, Texts and Readings in Mathematics Series.
- A. Connes, M. Marcolli, *Renormalization and motivic Galois theory*, International Math. Research Notices, (2004), no. 76, 4073–4091.
- A. Connes, M. Marcolli, *From Physics to Number theory via Noncommutative Geometry, II : Renormalization, the Riemann–Hilbert correspondence, and motivic Galois theory*, to appear in “Frontiers in Number Theory, Physics, and Geometry” Vol.II. Preprint hep-th/0411114.
- A. Connes, C. Consani, M. Marcolli, *Noncommutative geometry and motives : the thermodynamics of endomotives*, math.QA/0512138.

Transparents du deuxième cours

- Théorie quantique des champs**
- Graphes de Feynman**

Lagrangien → Hamiltonien

$$S = \int L(q, \dot{q}) dt$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$$

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} m \dot{q}^2 - V(q)$$

$$\lambda : T_q C \rightarrow T_q^* C$$

$$\lambda(\dot{q}) = \partial_{\dot{q}} L(q, \dot{q}) \in T_q^* C$$

$$\lambda^{-1}? \quad T_q^* C \rightarrow T_q C$$

$$\lambda(\dot{q}) = p \Leftrightarrow \dot{q} \rightarrow p \dot{q} - L(q, \dot{q})$$

stationnaire

Hamiltonien

$$H(p, q) = p \lambda^{-1}(p) - L(q, \lambda^{-1}(p)), \quad \forall p \in T_q^*C$$

$$L(q, \dot{q}) dt = p dq - H dt$$

$L \longleftrightarrow H$ symétrique

$$\{f, g\} = \left\langle \frac{\partial f}{\partial p}, \frac{\partial g}{\partial q} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial f}{\partial q}, \frac{\partial g}{\partial p} \right\rangle$$

$$\frac{d}{dt} f = \{H, f\}$$

$$H(p, q) = \frac{p^2}{2m} + V(q)$$

Lagrangien en QFT

$$S(\phi) = \int \mathcal{L}(\phi) d^D x$$

$$\mathcal{L}(\phi) = \frac{1}{2}(\partial\phi)^2 - \frac{m^2}{2}\phi^2 - \mathcal{L}_{\text{int}}(\phi).$$

$$(\partial\phi)^2 = g^{\mu\nu} \partial_\mu\phi \partial_\nu\phi$$

$$[g^{\mu\nu}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Lagrangien libre

$$\mathcal{L}_0(\phi) = \frac{1}{2}(\partial\phi)^2 - \frac{m^2}{2}\phi^2$$

Intégrale de Feynman

Amplitude de probabilité

$$\exp\left(i\frac{S(\phi)}{\hbar}\right)$$

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \mathcal{N} \int \mathcal{O}(\phi) e^{i\frac{S(\phi)}{\hbar}} D[\phi],$$

$$\mathcal{N}^{-1} = \int e^{i\frac{S(\phi)}{\hbar}} D[\phi]$$

Hamiltonien en QFT

$$t \rightarrow q(t) = \phi(t, \bullet) \in C$$

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \int \dot{\phi}(x)^2 d^{D-1}x - V(\phi)$$

$$V(\phi) = \int \left(\frac{1}{2} (\partial\phi)^2 + \frac{m^2}{2} \phi^2 + \mathcal{L}_{\text{int}}(\phi) \right) d^{D-1}x$$

$$T^*C \sim TC, \quad \int a(x) b(x) d^{D-1}x$$

Hamiltonien

$$H(\pi, \phi) =$$

$$\int \left(\frac{1}{2} \pi^2 + \frac{1}{2} (\partial_j \phi)^2 + \frac{m^2}{2} \phi^2 + \mathcal{L}_{\text{int}}(\phi) \right) d^{D-1}x$$

Quantification canonique

$$[\tilde{\phi}(x), \tilde{\phi}(y)] = 0, \quad [\tilde{\pi}(x), \tilde{\pi}(y)] = 0,$$

$$[\tilde{\pi}(x), \tilde{\phi}(y)] = -i \hbar \delta(x - y)$$

$$\tilde{\phi}(t, x) = e^{itH} \tilde{\phi}(x) e^{-itH}$$

$$\sigma_t(T) = e^{itH} T e^{-itH}$$

Algèbre \mathcal{A} et dynamique $\sigma_t \in \text{Aut}\mathcal{A}$

Etat de “vide”

- ρ est une représentation irréductible
- Il existe un opérateur *positif* non-borné H sur \mathcal{H} tel que

$$\rho(\sigma_t(A)) = e^{itH} \rho(A) e^{-itH}, \quad \forall A \in \mathcal{A}$$

- Il existe un unique vecteur propre $|0\rangle \in \mathcal{H}$, $H|0\rangle = 0$ et $\rho(\mathcal{A})|0\rangle \subset \mathcal{H}$ est dense dans \mathcal{H}

$$\psi(A) = \langle 0 | \rho(A) | 0 \rangle, \quad \forall A \in \mathcal{A}$$

$$F(t) = \psi(A \sigma_t(B))$$

KMS $_{\infty}$ i.e. $T = 0$, Dirac coeff. A et B : $T > 0$.

$$\psi_{\beta}(A) = Z^{-1} \text{Tr}(A e^{-\beta H}), \quad Z = \text{Tr}(e^{-\beta H_b})$$

QFT

- Définition des observables et de la dynamique
- Classification des états de vide.

Trois propriétés

- Causalité
- Positivité de l'énergie
- Unitarité

$$[\tilde{\phi}(x), \tilde{\phi}(y)] = 0, \quad \forall(x, y), \quad (x - y)^2 < 0$$

$$F(t) = \psi(A \sigma_t(B)) \rightarrow F(z) \quad \Im z \geq 0$$

$$\psi(A^* A) \geq 0, \quad \forall A \in \mathcal{A}$$

Exemple très simple

$$X = S^1 \times \mathbb{R}$$

$$\mathcal{L}(\phi) = \frac{1}{2} \left((\partial_0 \phi)^2 - (\partial_1 \phi)^2 - m^2 \phi^2 \right)$$

$$S(\phi) = \int \mathcal{L}(\phi) \, dx \, dt = \int L(t) \, dt$$

$$L(t) = \int_{S^1} \left(\frac{1}{2} (\dot{\phi})^2 - \frac{1}{2} (\partial \phi)^2 - \frac{m^2}{2} \phi^2 \right) \, dx$$

$$H(\phi, \pi) = \frac{1}{2} \int_{S^1} \left(\pi(x)^2 + (\partial \phi(x))^2 + m^2 \phi^2(x) \right) \, dx$$

$$\phi \rightarrow \int_{S^1} \phi(x) \, \pi(x) \, dx \in \mathbb{R}$$

Fourier

$$H = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{2} \left(\pi_k \bar{\pi}_k + (k^2 + m^2) \phi_k \bar{\phi}_k \right)$$

Réalité \Rightarrow

$$\phi_{-k} = \bar{\phi}_k \quad \pi_{-k} = \bar{\pi}_k \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

$$[p, q] = -i \hbar$$

$$H = \frac{1}{2}(p^2 + \omega^2 q^2) = \hbar \omega a^* a \quad \left(+\frac{1}{2}\right)$$

$$[a_k, a_k^*] = 1 \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

$$[a_k, a_\ell] = 0, \quad [a_k, a_\ell^*] = 0 \quad \forall k \neq \ell$$

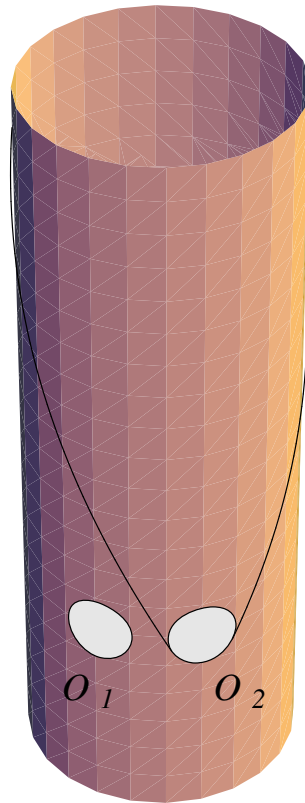
$$H_b = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hbar \omega_k a_k^* a_k$$

$$\omega_k = \sqrt{k^2 + m^2}$$

Champ Quantique

$$\phi(t, x) = e^{it \cdot H_b} \phi(0, x) e^{-it H_b}, \text{ où}$$

$$\phi(0, x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(a_k e^{ikx} + a_k^* e^{-ikx} \right) (2\omega_k)^{-1/2}$$



Causalité

$$\phi(f) = \int f(x) \phi(0, x) dx, \quad f \in C^\infty(S^1)$$

$$[\phi(f), \phi(g)] = 0$$

$$[\sigma_t \phi(f), \phi(g)] = \int c(x, y, t) f(x) g(y) dx dy,$$

$$c(x, y, t) = \sum_k e^{-ik(x-y)} \left(e^{-i\omega_k t} - e^{i\omega_k t} \right) \omega_k^{-1}$$

= $c(x - y, t)$ où c satisfait l'équation de Klein-Gordon

$$\left(\partial_0^2 - \partial_1^2 + m^2 \right) c = 0$$

avec $c(x, 0) = 0$, $\partial/\partial t c(x, 0) = \lambda \delta_0(x)$

Etat de vide

$$\mathcal{H}_b = \bigotimes_{k \in \mathbb{Z}} (\mathcal{H}_k, \Omega_k)$$

$\mathcal{U}(\mathcal{O})$ algèbre de von Neumann dans \mathcal{H}_b
engendrée par les fonctions des $\phi(f)$ avec
Support $f \subset \mathcal{O}$

- Causalité $\mathcal{U}(\mathcal{O}_1) \subset \mathcal{U}(\mathcal{O}_2)'$
- Positivité de l'énergie $H_b \geq 0$
- Unitarité

KMS $_{\beta}$

$$\psi_{\beta}(A) = Z^{-1} \text{Tr}(A e^{-\beta H_b}), \quad Z = \text{Tr}(e^{-\beta H_b})$$

Fonctions de Green

$$G_N(x_1, \dots, x_N) = \langle 0 | T \tilde{\phi}(x_1) \dots \tilde{\phi}(x_N) | 0 \rangle$$

$$\text{Dyson} \quad t_1 \geq t_2 \geq \dots \geq t_N$$

$$G_N(x_1, \dots, x_N) = \mathcal{N} \int e^{i \frac{S(\phi)}{\hbar}} \phi(x_1) \dots \phi(x_N) D[\phi]$$

$$S(\phi) = S_0(\phi) + S_{\text{int}}(\phi)$$

$$d\Lambda = \exp(i S_0(\phi)) D[\phi],$$

$$G_N(x_1, \dots, x_N) =$$

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int \phi(x_1) \dots \phi(x_N) S_{\text{int}}(\phi)^n d\Lambda \right)$$

$$\cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int S_{\text{int}}(\phi)^n d\Lambda \right)^{-1}$$

Gellman-Low

ϕ_F champs libres

$$G_N(x_1, \dots, x_N) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int \langle 0 | T \phi_F(x_1) \dots \phi_F(x_N) \prod \mathcal{L}_{\text{int}}(y_j) | 0 \rangle \prod dy_j \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int \langle 0 | T \prod \mathcal{L}_{\text{int}}(y_j) | 0 \rangle \prod dy_j \right)^{-1}$$
$$G_2^F(x, y) = \int \phi(x) \phi(y) \exp(i S_0(\phi)) D[\phi]$$

Intégration sous $\exp -\frac{Q(X)}{2} D[X]$

V espace vectoriel réel, $Q \in V^* \otimes V^*$ forme quadratique non-dégénérée.

$$Q \in \text{Hom}(V, V^*) \rightarrow Q^{-1} \in \text{Hom}(V^*, V)$$

$$\partial_{Q^{-1}(L)} \frac{1}{2} Q = L$$

$$\begin{aligned} & \int P(X) L(X) \exp -\frac{Q(X)}{2} D[X] = \\ & - \int P(X) \partial_{Q^{-1}(L)} \left(\exp -\frac{Q(X)}{2} \right) D[X] = \\ & \int \partial_{Q^{-1}(L)} (P(X)) \exp -\frac{Q(X)}{2} D[X] \end{aligned}$$

$$Q^{-1} = \text{Propagateur}$$

Intégration sous $\exp(i S_0(\phi)) D[\phi]$

$$S_0(\phi) = (2\pi)^{-D} \int \frac{1}{2}(p^2 - m^2) \hat{\phi}(p) \hat{\phi}(-p) d^D p$$

$$\phi(x) = (2\pi)^{-D} \int \hat{\phi}(p) e^{ip \cdot x} d^D p$$

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_0 \int \hat{\phi}(p_1) \hat{\phi}(p_2) \exp(i S_0(\phi)) D[\phi] = \\ i (2\pi)^D \delta(p_1 + p_2) (p_1^2 - m^2)^{-1} \end{aligned}$$

$$G_2^F(x, y) = i (2\pi)^{-D} \int \frac{e^{\pm ip \cdot (x-y)}}{p^2 - m^2} d^D p$$

Lemme

Soient $u > 0$ et $\omega > 0$ alors

$$\text{Lim}_{\epsilon \rightarrow 0+} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{\pm i p u}}{p^2 - \omega^2 + i\epsilon} dp = \frac{\pi}{i\omega} e^{-i u \omega}$$

$$F(\omega) = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{i p u}}{p^2 - \omega^2} dp$$

définit une fonction holomorphe de ω

$\Im(\omega) < 0$. Pour $a > 0$ on a

$$F(-ia) = \frac{\pi}{a} e^{-u a}$$

d'où

$$F(\omega) = \frac{\pi}{i\omega} e^{-i u \omega}, \quad \forall \omega \in \mathbb{C}, \Im(\omega) < 0.$$

On applique à la racine $\sim \omega$ de $\omega^2 - i\epsilon$

Feynman $p^2 - m^2 + i\epsilon$

$$\langle 0 | \phi_F(t, x) \phi_F(s, y) | 0 \rangle =$$

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} (2\omega_k)^{-1} e^{i(k(x-y) - (t-s)\omega_k)}$$

$t - s > 0 + \text{Lemme} \rightarrow e^{-i(t-s)\omega_k} = \dots$

$$\langle 0 | T \phi_F(t, x) \phi_F(s, y) | 0 \rangle =$$

$$\frac{i}{2\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{i(k(x-y) - k_0(t-s))}}{k_0^2 - k^2 - m^2 + i\epsilon} dk_0$$

$$G_2^F(x, y) = i (2\pi)^{-D} \int \frac{e^{\pm ip \cdot (x-y)}}{p^2 - m^2 + i\epsilon} d^D p$$

Fonctions de Schwinger

$G_N(x_1, \dots, x_N)$ = valeur au bord de
 $S_N(x_1, \dots, x_N)$ fonctions holomorphes du
temps complexifié z_j de $x_j = (z_j, v_j)$ dans le
cône $\Im z_1 < \Im z_2 < \dots < \Im z_N$

$$S_N(x_1, \dots, x_N) =$$

$$\langle 0 | \tilde{\phi}(v_1) e^{i(z_2 - z_1)H} \dots \tilde{\phi}(v_{N-1}) e^{i(z_N - z_{N-1})H} \tilde{\phi}(v_N) | 0 \rangle$$

$$\langle 0 | \tilde{\phi}(v_1) e^{izH} \tilde{\phi}(v_2) | 0 \rangle, \quad \Im z \geq 0$$

Condition KMS_∞

Rotation de Wick

$$\tau = i t$$

$$\langle \mathcal{O} \rangle_E = \mathcal{N} \int \mathcal{O}(\phi_E) e^{-\frac{S_E(\phi_E)}{\hbar}} D[\phi_E]$$

$$\mathcal{N}^{-1} = \int e^{-\frac{S_E(\phi_E)}{\hbar}} D[\phi_E]$$

$$S_E(\phi_E) = \int \mathcal{L}_E(\phi_E) d^D x$$

$$\mathcal{L}_E(\phi_E) = \frac{1}{2}(\partial\phi_E)^2 + \frac{m^2}{2}\phi_E^2 + \mathcal{L}_{\text{int}}(\phi_E)$$

$$(\partial\phi)^2 = g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi$$

$$g^{\mu\nu} = \delta^{\mu\nu}$$

Développement perturbatif

$$S_N(x_1, \dots, x_N) =$$
$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int \phi_E(x_1) \dots \phi_E(x_N) S_{\text{int}}(\phi_E)^n d\Lambda \right)$$
$$\cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int S_{\text{int}}(\phi_E)^n d\Lambda \right)^{-1}$$

↓

Graphes de Feynman

Graphes de Feynman

$$\mathcal{L}(\phi) = \frac{1}{2}(\partial\phi)^2 - \frac{m^2}{2}\phi^2 - \frac{g}{3!}\phi^3$$

$$\int \phi_E(x_1) \phi_E(x_2) S_{\text{int}}(\phi_E)^2 d\Lambda$$

$$S_{\text{int}}(\phi_E) = \frac{g}{3!} \int \phi_E^3(x) d^D x = (2\pi)^{-2D} \frac{g}{3!}$$

$$\int \hat{\phi}(k_1) \hat{\phi}(k_2) \hat{\phi}(k_3) \delta(k_1 + k_2 + k_3) \prod d^D k_j$$

$$\phi_E(x_j) = (2\pi)^{-D} \int \hat{\phi}(p) e^{ipx_j} d^D p$$

$$\int \hat{\phi}(p_1) \hat{\phi}(p_2) \hat{\phi}(k_1) \hat{\phi}(k_2) \hat{\phi}(k_3) \hat{\phi}(q_1) \hat{\phi}(q_2) \hat{\phi}(q_3) d\Lambda$$

$$\delta(k_1 + k_2 + k_3) \delta(q_1 + q_2 + q_3) \prod d^D k_j \prod d^D q_j \prod d^D p_j$$

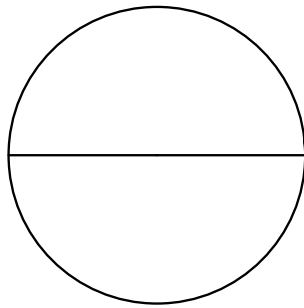
$$7 \times 5 \times 3 = 105$$

Accouplement $l_1 \longleftrightarrow l_2$

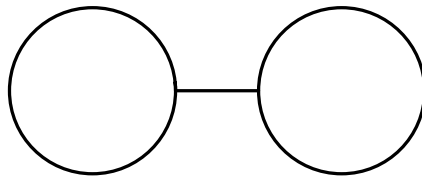


$$(2\pi)^D \delta(l_1 + l_2) \frac{1}{l_1^2 + m^2}$$

$p_1 \longleftrightarrow p_2$



$k_1 \longleftrightarrow q_1, \quad k_2 \longleftrightarrow q_2, \quad k_3 \longleftrightarrow q_3$

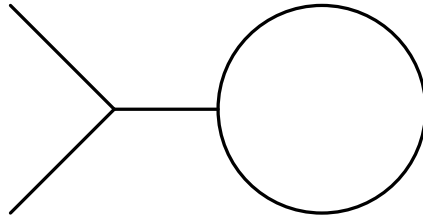


$k_1 \longleftrightarrow k_2, \quad k_3 \longleftrightarrow q_1, \quad q_2 \longleftrightarrow q_3$

$$15 = 6 + 9$$

Tadpole

$$p_1 \longleftrightarrow k_1, \quad p_2 \longleftrightarrow k_2$$



$$\Rightarrow k_3 \longleftrightarrow q_1, \quad q_2 \longleftrightarrow q_3$$

$$\delta(q_2 + q_3) \delta(q_1 + q_2 + q_3) \Rightarrow q_1 = 0$$

$$\Rightarrow k_3 = 0 \rightarrow \delta(p_1 + p_2)$$

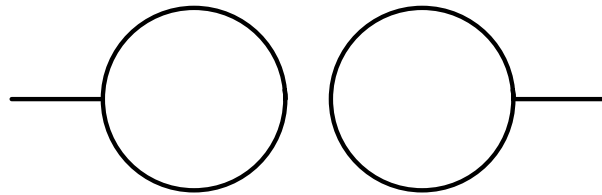
Graphe connexe avec une patte externe =
Tadpole

$$\langle 0 | \phi(x) | 0 \rangle = 0$$

$$6 \times 3 \times 2 = 36$$

Deux tadpoles

$$p_1 \longleftrightarrow k_1, \quad p_2 \longleftrightarrow q_1, \quad k_2 \longleftrightarrow k_3, \quad q_2 \longleftrightarrow q_3$$



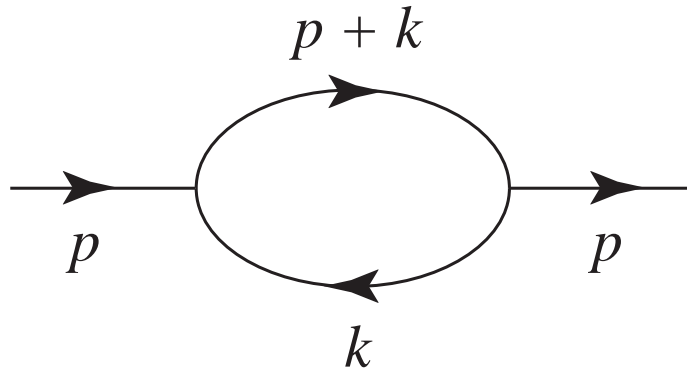
$$\delta(k_2 + k_3) \delta(k_1 + k_2 + k_3) \Rightarrow k_1 = 0$$

$$\Rightarrow p_1 = 0$$

$$9 \times 2 = 18$$

Self-Energie

$$p_1 \longleftrightarrow k_1, \quad p_2 \longleftrightarrow q_1, \quad k_2 \longleftrightarrow q_2, \quad k_3 \longleftrightarrow q_3$$



$$\frac{g^2}{2} \delta(p_1 + p_2) \frac{1}{p_1^2 + m^2} \frac{1}{p_2^2 + m^2}$$

$$\int \frac{1}{k^2 + m^2} \frac{1}{((p_1 + k)^2 + m^2)} d^D k$$

$$9 \times 2 \times 2 = 36$$

Facteurs $(2\pi)^{ND}$, $d^D k \rightarrow (2\pi)^{-D}$, $\delta(\bullet) \rightarrow (2\pi)^D$

Renormalisation de la Masse

$$\int e^{-\lambda k^2} d^D k = \lambda^{-D/2} \pi^{D/2}$$

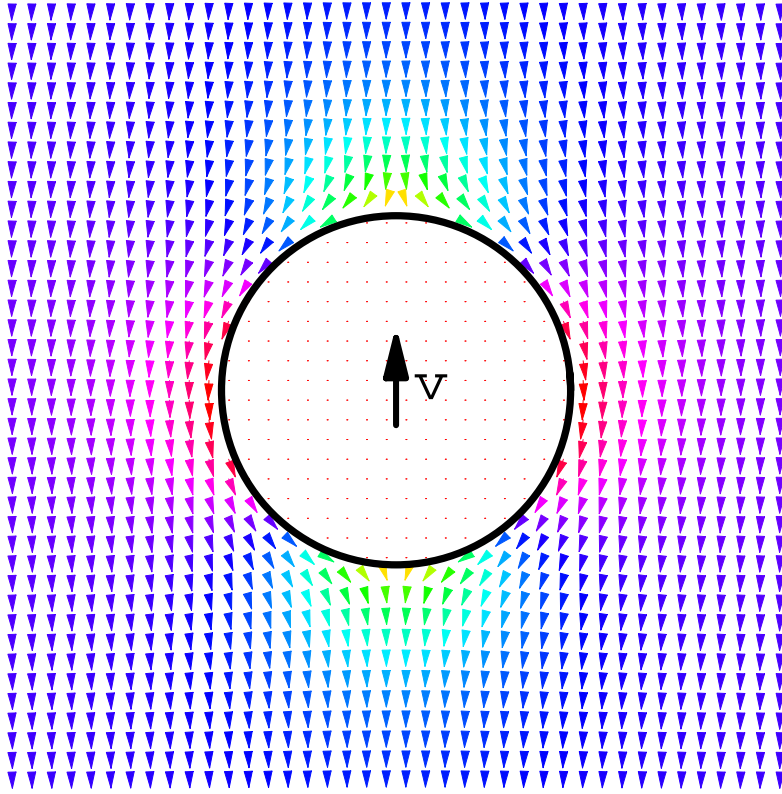
↓

$$\int \frac{1}{k^2 + m^2} \frac{1}{((p+k)^2 + m^2)} d^D k =$$
$$\pi^{D/2} \Gamma\left(2 - \frac{D}{2}\right) \int_0^1 (x(1-x)p^2 + m^2)^{D/2-2} dx$$

Hydrodynamique Green 1830

$$F = m a$$

$$m \rightarrow m + \delta m$$



$$X = \text{Grad } h, \quad \Delta h = 0$$

$$h(x, y, z) = \frac{v}{2} (r^{-3} + 2) z, \quad r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

$$E(x, y, z) = \frac{v^2}{8} \frac{x^2 + y^2 + 4z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^4} \rho \, dx \, dy \, dz$$

$$\int E = \frac{1}{2} \delta m v^2, \quad \delta m = \frac{1}{2} M$$

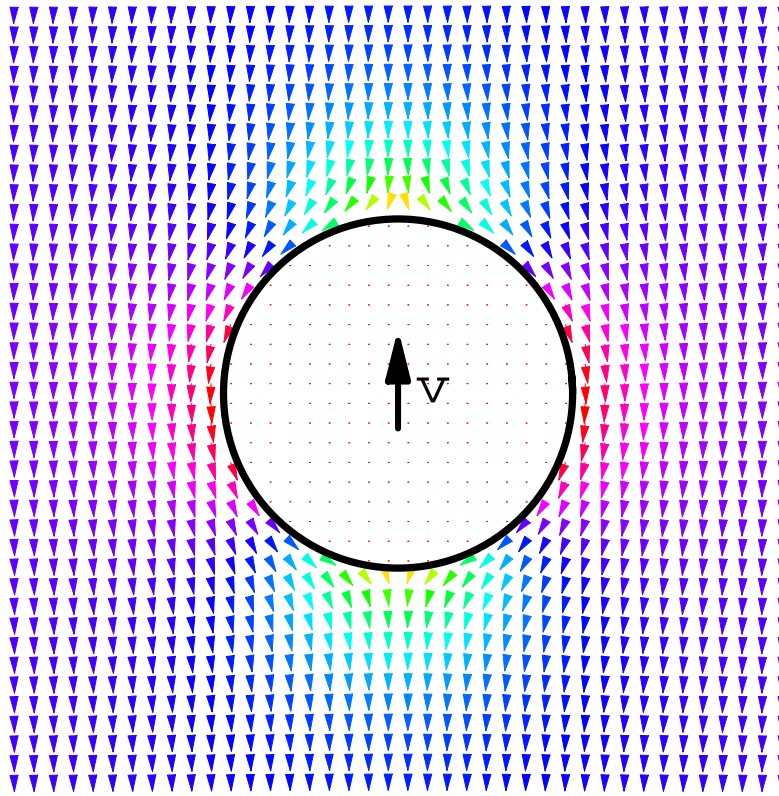
J. Collins, *Renormalization*, Cambridge Monographs in Math. Physics, Cambridge University Press, 1984.

P. Dirac, *The quantum theory of the emission and absorption of radiation*. Proc. London Royal Soc. 114 (1927) 243–265.

R. Feynman, *The reason for antiparticles*, Elementary Particles and the Laws of Physics, Cambridge Univ. Press (1987).

Transparents du troisième cours

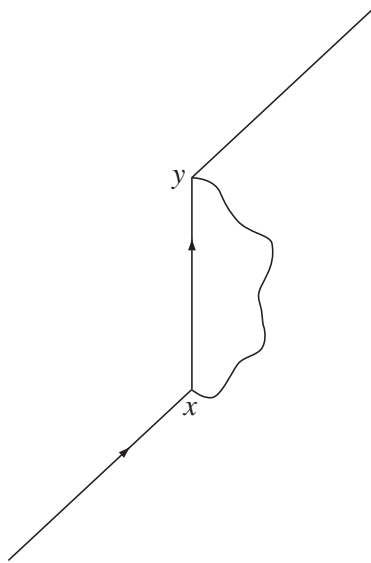
- Graphes de Feynman
- Renormalisation



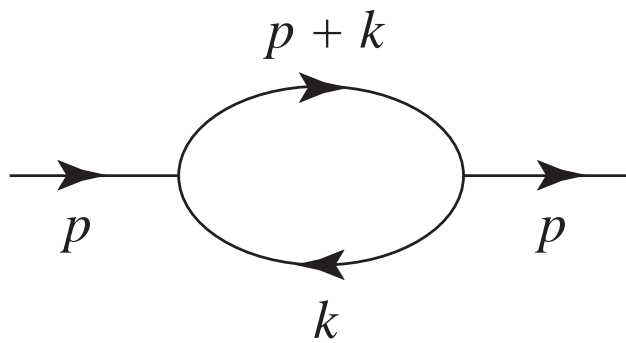
Hydrodynamique Green 1830

$$F = m a$$

$$m \rightarrow m + \delta m$$



Oppenheimer 1930



$$\frac{1}{2}g^2 \delta(p_1 + p_2) \frac{1}{p_1^2 + m^2} \frac{1}{p_2^2 + m^2}$$

$$\int \frac{1}{k^2 + m^2} \frac{1}{((p_1 + k)^2 + m^2)} d^D k$$

$$D = 4$$

$$\int_{\|k\| \leq \Lambda} \frac{1}{k^2 + m^2} \frac{1}{((p_1 + k)^2 + m^2)} d^4 k \sim 2\pi^2 \ln \Lambda$$

Une correction de la masse

$$\delta S(\phi_E) = \frac{1}{2} \delta m^2(\Lambda) \int \phi_E^2(x) d^4 x \rightarrow$$

donne une nouvelle contribution à la fonction
de Green

$$- \int \phi_E(x_1) \phi_E(x_2) \delta S(\phi_E) d\Lambda$$

Contre-terme



$$\delta S(\phi_E) = \frac{1}{2} \delta m^2(\Lambda) (2\pi)^{-4}$$

$$\int \hat{\phi}(k_1) \hat{\phi}(k_2) \delta(k_1 + k_2) \prod d^4 k_j \rightarrow$$

$$-\frac{1}{2} \delta m^2(\Lambda) (2\pi)^{-4} \delta(k_1 + k_2)$$

$$\left(\int \hat{\phi}(p_1) \hat{\phi}(p_2) \hat{\phi}(k_1) \hat{\phi}(k_2) d\Lambda \right) \prod d^4 k_j$$

↓

$$-\delta m^2(\Lambda) (2\pi)^4 \delta(p_1 + p_2) \frac{1}{p_1^2 + m^2} \frac{1}{p_2^2 + m^2}$$

$$\delta m^2(\Lambda) = (2\pi)^{-4} \pi^2 g^2 \ln \Lambda \rightarrow OK$$

Développement perturbatif

$$S_N(x_1, \dots, x_N) = \sum \int \frac{V(\Gamma)(p_1, \dots, p_N)}{\sigma(\Gamma)} e^{i(x_1 \cdot p_1 + \dots + x_N \cdot p_N)} \prod \frac{dp_j}{(2\pi)^D}$$

- Γ (Graphe de Feynman)
- $V(\Gamma)(p_1, \dots, p_N)$ (Valeur non-renormalisée)
- $\sigma(\Gamma)$ (facteur de symétrie)

Graphe de Feynman Γ

Complexe simplicial de dimension 1,

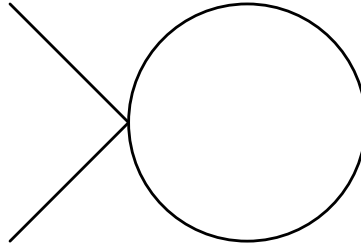
$\Gamma^{(0)}$ sommets, $\Gamma^{(1)}$ arêtes

$$\partial_j : \Gamma^{(1)} \rightarrow \Gamma^{(0)} \cup \{1, 2, \dots, N\}, \quad \forall j \in \{0, 1\}$$

$$\iota : \Gamma^{(0)} \rightarrow I$$

où I est l'ensemble des monômes dans \mathcal{L}_{int} .

Réalisation Géométrique



$$\deg \iota(v) = \sum \text{card } \partial_j^{-1}\{v\}, \quad \forall v \in \Gamma^{(0)}$$

$$\sum \text{card } \partial_j^{-1}\{v\} = 1, \quad \forall v \in \{1, 2, \dots, N\}$$

Externes

$$\Gamma_{ext}^{(1)} = \cup_j \partial_j^{-1}\{1, 2, \dots, N\} \subset \Gamma^{(1)}$$

$$\text{Internes } \Gamma_{int}^{(1)} \subset \Gamma^{(1)}$$

$|\Gamma|$ (non nécessairement planaire)

$$|\Gamma| = \Gamma^{(1)} \times [0, 1] \cup_{\partial} (\Gamma^{(0)} \cup \{1, 2, \dots, N\})$$

Accouplement \rightarrow Graphe

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = \sum_I \mathcal{M}$$

$$\frac{(-1)^n}{n!} \int \hat{\phi}(p_1) \dots \hat{\phi}(p_N) \prod_{j \in X} \mathcal{M}_j d\Lambda$$

$$\mathcal{M} = \frac{-z}{d!} \phi_E(x)^d \rightarrow$$

$$z (2\pi)^D \delta(\sum k_i) \prod \hat{\phi}(k_i) \frac{dk_i}{(2\pi)^D}$$

$$\mathcal{M} = \frac{-z}{2} (\partial \phi_E(x))^2 \rightarrow$$

$$z (2\pi)^D \delta(k_1 + k_2) k_1^2 \hat{\phi}(k_1) \hat{\phi}(k_2) \frac{dk_1 dk_2}{(2\pi)^{2D}}$$

Accouplement \rightarrow Graphe

$$\int \hat{\phi}(p_1) \dots \hat{\phi}(p_N) \prod_{j \in X} \prod_{i=1}^{d_j} \hat{\phi}(k_i(j)) d\Lambda$$

Chaque accouplement donne un graphe Γ
avec

– $\Gamma^{(0)} = X, \iota(j) = \mathcal{M}_j, X \rightarrow I$

– $\Gamma^{(1)}$ est l'ensemble des couples

Choix arbitraire d'orientation et ∂_j

$$p_\ell \rightarrow \ell \in \{1, 2, \dots, N\}, \quad k_i(j) \rightarrow j \in X = \Gamma^{(0)}$$

p_i accouplé à $k_\ell \rightarrow$ externe

Règles de Feynman

1) Pour chaque $\ell \in \Gamma_{ext}^{(1)}$ un propagateur

$$\frac{1}{p_i^2 + m^2}, \quad i \in \partial(\ell)$$

2) Pour chaque $\ell \in \Gamma_{int}^{(1)}$ un moment $k = k_\ell$ et un propagateur

$$\frac{1}{k^2 + m^2} \frac{d^D k}{(2\pi)^D}$$

3) Pour chaque sommet v , $\iota(v) = \frac{-z}{d!} \phi_E^d$ une loi de conservation

$$z (2\pi)^D \delta\left(\sum_{\partial_0(\ell)=v} k_\ell - \sum_{\partial_1(\ell)=v} k_\ell \right)$$

4) Pour chaque sommet v , $\iota(v) = \frac{-z}{2} (\partial\phi_E)^2$ un terme

$$z (2\pi)^D k^2 \delta\left(\sum_{\partial_0(\ell)=v} k_\ell - \sum_{\partial_1(\ell)=v} k_\ell \right)$$

Valeur $V(\Gamma)(p_1, \dots, p_N)$

Intégrale multiple du produit des termes
ci-dessus : $\prod_{\Gamma^{(0)} \cup \Gamma^{(1)}}$

Se factorise sur les composantes connexes de
 $|\Gamma|$

$$V(\Gamma) = \prod V(\Gamma_c)$$

Propagateurs externes

$$\epsilon(\Gamma) = (2\pi)^D \delta(\sum p_j) \prod \frac{1}{p_j^2 + m^2}$$

$$\epsilon(\Gamma) = \prod \epsilon(\Gamma_c)$$

Nombre de variables d'intégration (connexe)

$$L(\Gamma) = \text{card } \Gamma_{int}^{(1)} - \text{card } \Gamma^{(0)} + 1 = b_1(|\Gamma|)$$

Facteur de symétrie

$$\frac{(-1)^n}{n!} \int \hat{\phi}(p_1) \dots \hat{\phi}(p_N) \prod_{j \in X} \mathcal{M}_j d\Lambda$$

$$|X| = n, \mathcal{M} = \frac{-z}{d!} \phi_E^d \rightarrow \text{pas de signe } -$$

$$\prod_{j \in X} \mathcal{M}_j = \prod_I \mathcal{M}^{n_\iota}, \quad \sum n_\iota = n$$

$(\sum_I \mathcal{M})^n \rightarrow$ binôme \rightarrow dénominateur

$$\delta = \prod n_\iota! \prod (d_\iota!)^{n_\iota}, \quad d_\iota = \deg \mathcal{M}$$

ordre du groupe Δ des permutations des termes $\hat{\phi}(k_i(j))$ qui respectent la structure $X \rightarrow I$ etc...

**Isotropie accouplement =
Automorphisme du Graphe**

$$\sigma(\Gamma) = \text{card} \{g \in \Delta ; g(\pi) = \pi\}$$

$$\sigma(\Gamma) = \text{card Aut}\Gamma$$

Orientation ne fait pas partie de la structure

Fonctions de Green connexes

$$Z(J) = \mathcal{N} \int \exp \left(i \frac{S(\phi) + \langle J, \phi \rangle}{\hbar} \right) D[\phi] =$$

$$\sum_{N=0}^{\infty} \frac{i^N}{N!} \int J(x_1) \dots J(x_N) G_N(x_1, \dots, x_N) dx_1 \dots dx_N,$$

$$iW(J) = \log(Z(J)) =$$

$$\sum_{N=0}^{\infty} \frac{i^N}{N!} \int J(x_1) \dots J(x_N) G_{N,c}(x_1, \dots, x_N) dx_1 \dots dx_N.$$

Propagateur $\rightarrow \hbar$, Interaction $\rightarrow \hbar^{-1}$,

Graphe $\Gamma(p_1, \dots, p_N) \rightarrow \hbar^{N+L(\Gamma)-1}$

Source $J \rightarrow \hbar^{-1}$

$$\hbar^{L(\Gamma)-1}$$

Euclidien = énergie libre

$$W = \sum \frac{V(\Gamma)}{s(\Gamma)} \rightarrow e^W = \sum \frac{V(\Gamma)}{s(\Gamma)}$$

$$V(\Gamma_1 \cup \Gamma_2) = V(\Gamma_1) V(\Gamma_2), \quad s(\Gamma) = \prod n_j! \prod s(\Gamma_j)^{n_j}$$

$$Z(J_E) = \mathcal{N} \int \exp \left(-\frac{S(\phi_E) - \langle J_E, \phi_E \rangle}{\hbar} \right) D[\phi_E] =$$

$$\sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{N!} \int J_E(x_1) \dots J_E(x_N) S_N(x_1, \dots, x_N) dx_1 \dots dx_N,$$

$$W(J_E) = \log(Z(J_E)) = \sum_{\Gamma \text{ connexe}} \frac{V(\Gamma)(J_E)}{\sigma(\Gamma)}$$

$$V(\Gamma)(J) =$$

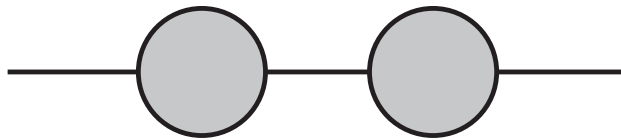
$$\frac{1}{N!} \int \hat{J}(p_1) \dots \hat{J}(p_N) V(\Gamma(p_1, \dots, p_N)) \prod \frac{dp_j}{(2\pi)^D}.$$

Graphes 1-particule irréductibles

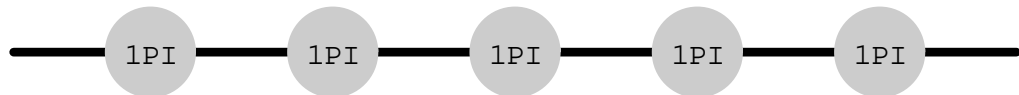
Soit Γ un graphe de Feynman connexe.

Γ est 1-particule irréductible (1PI) ssi

1. $L(\Gamma) \geq 1$ (pas un arbre)
2. Γ ne peut être disconnecté en enlevant une ligne $\ell \in \Gamma^{(1)}$



- a) Soit Γ un graphe de Feynman connexe avec $|\Gamma_{ext}^{(1)}| = 2$, alors Γ est de la forme $\Pi_1 \star \dots \star \Pi_n$ avec Π_j 1PI à deux arêtes externes



- b) La somme des contributions de tous ces graphes est

$$\sum \frac{V(\Gamma(p, -p))}{\sigma(\Gamma)} = \frac{1}{p^2 + m^2 - \sum \frac{U(\Pi(p, -p))}{\sigma(\Pi)}}$$

Pas de propagateurs externes

$$V(\Gamma(p_1, \dots, p_N)) = \epsilon(\Gamma) U(\Gamma(p_1, \dots, p_N))$$

$$V(\Gamma(p, -p)) = (p^2 + m^2)^{-q-1} U(\Pi(p, -p))^q$$

Action effective S_{eff}

$$S_{eff}(\phi) = S(\phi) - \sum_{\Gamma \in \text{1PI}} \frac{U(\Gamma)(\phi)}{\sigma(\Gamma)}$$

Corrections quantiques de l'action,

$$\frac{S_{eff}(\phi)}{\hbar} = \frac{S(\phi)}{\hbar} - \frac{1}{\hbar} \sum_{\Gamma \in \text{1PI}} \hbar^L \frac{\Gamma(\phi)}{\sigma(\Gamma)}$$

$$U(\Gamma)(\phi) =$$

$$\frac{1}{N!} \int_{\sum p_j=0} \hat{\phi}(p_1) \dots \hat{\phi}(p_N) U(\Gamma(p_1, \dots, p_N)) \prod \frac{dp_j}{(2\pi)^D}$$

$S_{eff} =$ transformée de Legendre de $W(J)$

$$\int P(\phi) e^{-S(\phi)} D[\phi] = \int_{\text{arbre}} P(\phi) e^{-S_{eff}(\phi)} D[\phi]$$

Phase stationnaire sur

$$\exp\left(-\frac{S_{eff}(\phi)}{T}\right)$$

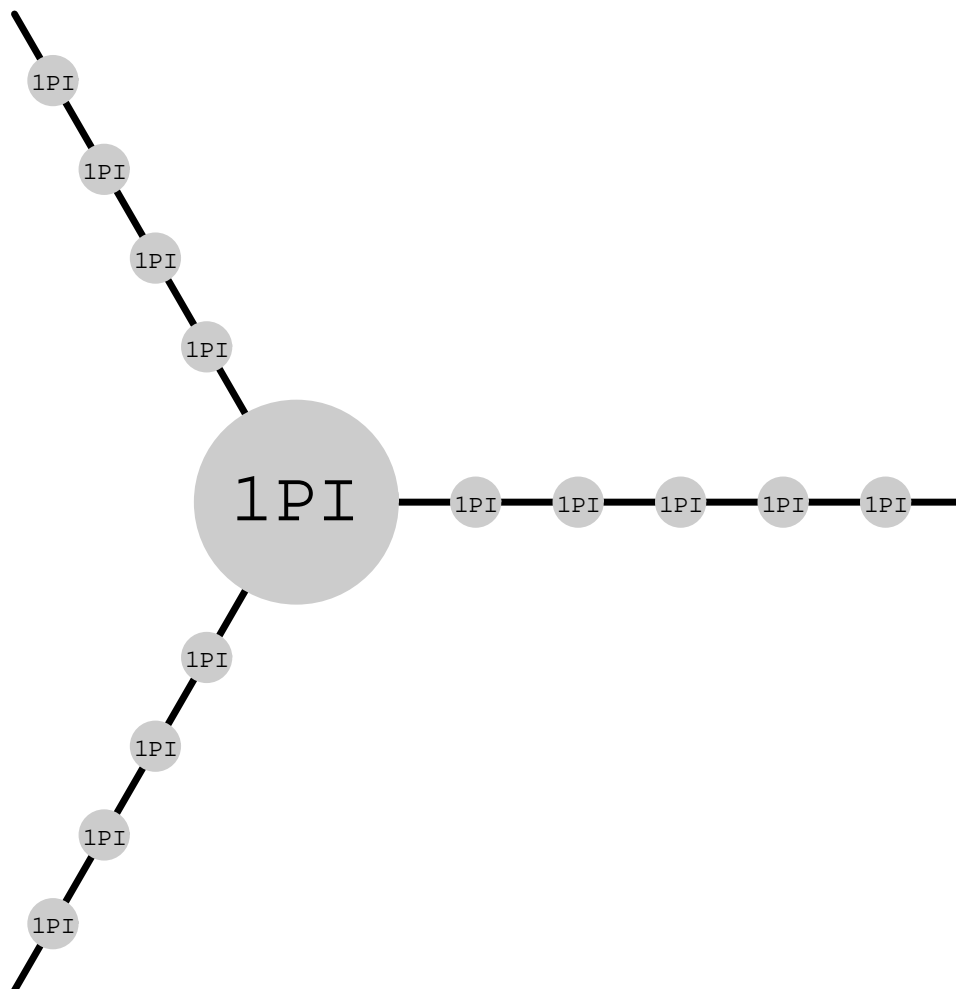
↓

réponse exacte !

$\Leftrightarrow W(J)$ transformée de Legendre de
 $S_{eff}(\phi)$

Forme générale d'un graphe Γ connexe avec

$$|\Gamma_{ext}^{(1)}| = 3$$



Masse Physique

Représentation du groupe de Poincaré

$$k^2 = \mu^2, k_0 > 0$$

particules

$$\mathcal{F}_m = \bigoplus_0^\infty S^n \mathcal{H}_m$$

$$\begin{aligned} G_{2,c}(x_1, x_2) &= \int \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} e^{i(x_1 - x_2) \cdot p} \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \\ &= \Delta_+(x_1 - x_2, m^2) \end{aligned}$$

Lehmann-Källén

La fonction de Green connexe (Minkowski)

$$Z^{-1} G_{2,c}(x_1, x_2) = \Delta_+(x_1 - x_2, m_{phys}^2) + \int_{m_{phys}^2 + c} \Delta_+(x_1 - x_2, u) \sigma(u) du$$

$G_{2,c}$ a un pôle isolé en $p^2 = m_{phys}^2$

Euclidien + Action effective

$$S_{2,c}(p) = \frac{1}{p^2 + m^2 - \sum U(\Pi(p, -p))/\sigma(\Pi)}$$

Calcul de m_{phys}

$$p^2 + m^2 - \sum \frac{U(\Pi(p, -p))}{\sigma(\Pi)} = 0 \quad \text{pour } p^2 = -m_{phys}^2$$

self-énergie

$$\Pi(p^2) = \sum \frac{U(\Pi(p, -p))}{\sigma(\Pi)}$$

Matrice S (LSZ)

$$\phi' = Z^{-1/2} \phi$$

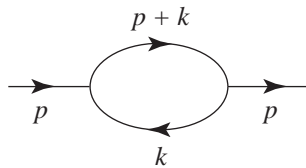
Z = résidu de $S_{2,c}(p)$ au pôle $p^2 = -m_{phys}^2$

$$\langle k_1, \dots, k_s | S - 1 | k_{s+1}, \dots, k_r \rangle = i^{-r} Z^{-r/2}$$

$$\prod (k_j^2 - m_{phys}^2) G_N(-k_1, \dots, -k_s, k_{s+1}, \dots, k_r)$$

Elément de $S - 1$ matrice = Fonction de Green sans propagateur externe

Renormalisation de la masse



$$D = 4$$

Contribution à la self-énergie

$$\pi(p^2) = \frac{1}{2}g^2 (2\pi)^{-4} \int \frac{1}{k^2 + m^2} \frac{1}{((p+k)^2 + m^2)} d^4k$$

Renormalisation de la masse

On distingue la masse *nue* m_0 de la masse physique m_{phys} et on pose

$$m_0^2 = m^2 + \delta m^2(\Lambda)$$

et

On considère $\delta m^2(\Lambda) \frac{\phi^2}{2}$ comme un nouveau terme d'interaction dans le Lagrangien.

On prend $m = m_{phys}$.

(d'où le propagateur $(p^2 + m^2)^{-1}$)

Contre-terme de masse

On choisit $\delta m^2(\Lambda)$ pour que la condition

$$\Pi(-m^2) = 0$$

soit vérifiée, d'où

$$\delta m^2 = \pi(-m^2)$$

$$\pi_{ren}(p^2) = \pi(p^2) - \pi(-m^2)$$

$$\pi_{ren}(p^2) = \frac{g^2}{32\pi^2} \int_0^1 \log\left(\frac{x(1-x)p^2 + m^2}{m^2(1+x-x^2)}\right) dx$$

Renormalisation de ϕ

$$\phi = Z^{1/2} \phi'$$

On change de variable dans l'intégrale fonctionnelle

$$\mathcal{N}' \int \exp(-S(Z^{1/2} \phi')) \phi'(x_1) \dots \phi'(x_N) D[\phi']$$

$$\mathcal{L}' = \frac{1}{2} Z (\partial \phi')^2 + \dots$$

On choisit $Z(\Lambda)$ pour que la condition

$$\partial \Pi(-m^2) = 0$$

soit vérifiée.

N.N. Bogoliubov and D.V. Shirkov, *Introduction to the theory of quantized fields*, 3rd ed., Wiley 1980.

J. Collins, *Renormalization*, Cambridge Monographs in Math. Physics, Cambridge University Press, 1984.

M. Dresden, *Renormalization in historical perspective - The first stage*, in "Renormalization", ed. L. Brown, Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg 1994.

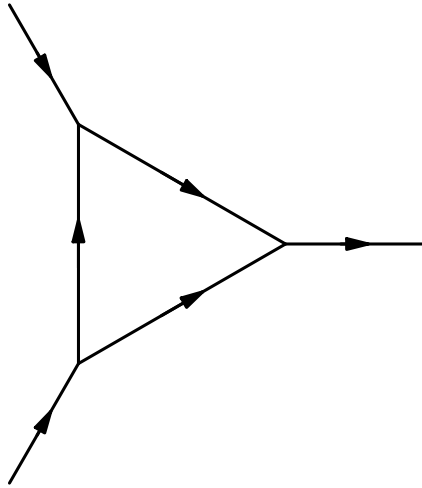
J. Glimm and A. Jaffe. Quantum physics. *Springer, New York*, 1981

Transparents du quatrième cours

- Dim-Reg + MS
- BPHZ

Renormalisation de la constante de couplage

$$g_{\text{eff}} = Z^{-3/2} \left(g - \sum_{\text{diagram}} \frac{U(\Gamma(0,0,0))}{\sigma(\Gamma)} \right)$$



$$g^3 (2\pi)^{-6} \int \frac{1}{k^2 + m^2} \frac{1}{((p+k)^2 + m^2)} \frac{1}{((q-k)^2 + m^2)} d^6 k$$

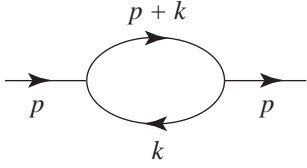
Lagrangien avec les contre-termes

$$\mathcal{L}_E = \frac{1}{2}(\partial\phi)^2(1-\delta Z) + \left(\frac{m^2 - \delta m^2}{2}\right)\phi^2 + \frac{g - \delta g}{6}\phi^3$$

t'Hooft-Veltman Dim-Reg + MS

(Soustraction Minimale)

Dim-Reg



$$\rightarrow \int \frac{1}{k^2 + m^2} \frac{1}{((p+k)^2 + m^2)} d^D k.$$

$$\frac{1}{P} = \int_0^\infty e^{-sP} ds$$

$$\frac{1}{k^2 + m^2} \frac{1}{(p+k)^2 + m^2} =$$

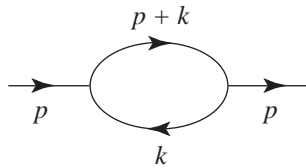
$$\int_{s>0, t>0} e^{-s(k^2+m^2)-t((p+k)^2+m^2)} ds dt.$$

$$-Q(k) = -\lambda((k+xp)^2 + ((x-x^2)p^2 + m^2)),$$

$$s = (1-x)\lambda, \quad t = x\lambda$$

Gaussienne en dimension D

$$\int e^{-\lambda q^2} d^D q = \pi^{D/2} \lambda^{-D/2}$$



$$\begin{aligned} & \int_0^1 \int_0^\infty e^{-(\lambda(x-x^2)p^2 + \lambda m^2)} \int e^{-\lambda q^2} d^D q \lambda d\lambda dx \\ &= \pi^{D/2} \int_0^1 \int_0^\infty e^{-(\lambda(x-x^2)p^2 + \lambda m^2)} \lambda^{-D/2} \lambda d\lambda dx \\ &= \pi^{D/2} \Gamma(2-D/2) \int_0^1 ((x-x^2)p^2 + m^2)^{D/2-2} dx \end{aligned}$$

Cas Général

$$I_{\Gamma}(\kappa) = \frac{P(\kappa, p)}{\prod_j F_j(\kappa, p)^2 + m_j^2}$$

$$\int P(\kappa, p) \left(\int e^{-\sum t_j (F_j(\kappa, p)^2 + m_j^2)} dt \right) d^D \kappa =$$
$$\int \left(e^{-\sum t_j m_j^2} \int P(\kappa, p) e^{-\sum t_j F_j(\kappa, p)^2} d^D \kappa \right) dt$$

$$\sum t_j F_j(\kappa, p)^2 = A(t)(q) + \sum t_j F_j(\kappa(t), p)^2,$$

$$q = \kappa - \kappa(t)$$

$$A(t)(q) = \sum t_j F_j(q, 0)^2$$

Gaussienne $e^{-A(t)(q)} d^D q$

$$\int e^{-A(t)(q)} d^D q = \pi^{LD/2} \det(A(t))^{-D/2}$$

$$\kappa(t) = A(t)^{-1} \ell(t)$$

$$\int e^{-\sum t_j m_j^2 - \sum t_j F_j(\kappa(t), p)^2} f(p, t) \det(A(t))^{-D/2-n} dt$$

$$Q(t) = \det(A(t))$$

Lemme de Bernstein

Soit $Q(t)$ un polynôme à n variables. Il existe un opérateur différentiel polynômial $L(D)$ à n -variables à coefficients polynômes en D et un polynôme $q(D)$ tels que

$$L(D) Q^{-D/2} = q(D) Q^{-D/2-1}, \quad \forall D$$

Cas non-singulier

$$A Q + \sum A_j \partial_j Q = 1$$

$$L(D) = -\frac{D}{2} A + \sum A_j \partial_j, \quad q(D) = -\frac{D}{2}$$

Cas général :

\mathcal{F}_k le sous-module engendré par $Q^{-D/2-k}$

\mathcal{D} -modules (= représentations CCR)

$$p(t, D) Q^{-D/2-k}$$

$$Q^{-D/2-k-1} = P(t, \partial, D) Q^{-D/2-k}$$

$$\mathcal{P}_m = \{p(t, D) Q^{-D/2-m} : \deg p \leq m(\deg Q + 1)\}$$

$$\dim \mathcal{P}_m \sim (\deg Q + 1)^n m^n$$

↓

Nombre de générateurs $\leq (\deg Q + 1)^n$

Distribution $Q(t)^{-D/2}$ sur $t_j \geq 0$

Soit g une fonction de classe C^∞ sur $t_j \geq 0$, avec dérivées à décroissance rapide, alors

$$I(D, g) = \int_{t_j \in [0, \infty)} g(t) Q(t)^{-D/2} dt$$

se prolonge en une fonction méromorphe sur \mathbb{C} .

$$I(D + 2, g) = q(D)^{-1} I(D, L(D)^* g) + C(D)$$

$L(D)^*$ est l'adjoint de $L(D)$ et $C(D)$ terme de bord

Problème dans le cas général

$$g(p, t) = e^{-\sum t_j m_j^2 - \sum t_j F_j(\kappa(t), p)^2} f(p, t)$$

n'est pas C^∞ sur $t_j \geq 0$.

(terme $-\text{tr}(C B^{F^*}(t))$ dans l'équation (34) d'Etin-gof)

Lemme

$$g(p, t) = \sum g_\alpha(t) p^\alpha$$

le développement de Taylor de $g(p, t)$ en $p = 0$. Toutes les fonctions $g_\alpha(t)$ sont de la forme $Q(t)^{-|\alpha|} h_\alpha$ avec h_α de classe C^∞ sur $t_j \geq 0$.

Prolongement méromorphe

$$b(t, p) = e^{-\sum t_j F_j(\kappa(t, p), p)^2} = e^{a(t, p)}$$

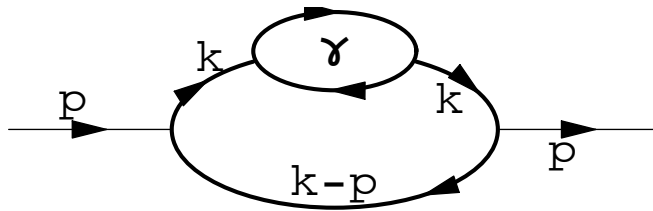
$$\kappa(t, 0) = 0 \text{ d'où } a(t, 0) = 0$$

Taylor(b) = polynôme en Taylor(a)

$\kappa(t, p)$ de la forme $A(t)^{-1}\ell(t, p)$ avec $\ell(t, p)$ bilinéaire en t et p .

Théorème Les coefficients de Taylor en $p = 0$ de l'expression $U^z(\Gamma(p_1, \dots, p_N))$ se prolongent en des fonctions méromorphes sur \mathbb{C} .

Sous-divergences



$$U(\Gamma(p, -p)) =$$

$$(2\pi)^{-2D} \int \frac{1}{k^4} \frac{1}{(k-p)^2} \frac{1}{(k+\ell)^2} \frac{1}{\ell^2} d^D k d^D \ell$$

(et $g^4 \mu^{2z}$)

L'intégration en ℓ donne

$$\int \frac{1}{(k + \ell)^2} \frac{1}{\ell^2} d^D \ell =$$

$$k^{D-4} \pi^{D/2} \Gamma(2 - D/2) \int_0^1 (x - x^2)^{D/2-2} dx$$

$$\int_0^1 (x - x^2)^{D/2-2} dx = \frac{\Gamma(D/2 - 1)^2}{\Gamma(D - 2)}$$

A des facteurs Γ prés,

$$I = \int (k^2)^{D/2-4} \frac{1}{(k - p)^2} d^D k$$

$$x^{D/2-4} = \Gamma(4 - D/2)^{-1} \int_0^\infty e^{-tx} t^{3-D/2} dt$$

$$I = \Gamma(4 - D/2)^{-1} \int e^{-t_1 k^2 - t_2 (k-p)^2} t_1^{3-D/2} dt_1 dt_2 d^D k$$

$$t_1 = \lambda s, \quad t_2 = \lambda(1 - s)$$

$$t_1 k^2 + t_2 (k - p)^2 = \lambda q^2 + \lambda (s - s^2)p^2$$

$$q = k - (1 - s)p$$

$$I = \Gamma(4 - D/2)^{-1} \pi^{D/2} \int e^{-\lambda(s-s^2)p^2} \lambda^{3-D} s^{3-D/2} \lambda d\lambda ds$$

$$U(\Gamma(p, -p)) = (4\pi)^{-D}$$

$$\frac{\Gamma(2 - \frac{D}{2})\Gamma(\frac{D}{2} - 1)^3\Gamma(5 - D)\Gamma(D - 4)}{\Gamma(D - 2)\Gamma(4 - \frac{D}{2})\Gamma(\frac{3D}{2} - 5)} (p^2)^{D-5}$$

Terme non-local $D = 6$

$$\Gamma(2 - \frac{D}{2})\Gamma(5 - D) \rightarrow \text{Pôle double}$$

$$(p^2/\mu^2)^{-z} = \sum \frac{(-z)^n}{n!} \log^n(p^2/\mu^2)$$

$$-g^4 (4\pi)^{-6} \frac{1}{18} p^2 (\log(p^2/\mu^2) + \text{cst.}) \frac{1}{z}$$

Fourier de $p^2 \log(p^2/\mu^2)$ non-local

Différentiation / moments externes

$$\partial_p \int \frac{1}{k^2 + m^2} \frac{1}{((p+k)^2 + m^2)} d^D k$$

améliore la convergence

$$\int \frac{1}{(k+l)^2} \frac{1}{l^2} d^D l \sim -\frac{1}{3} \pi^3 k^2 \frac{1}{z}$$

insensible à ∂_p

↓

$(-\frac{1}{3} \pi^3 \frac{1}{z}) \times$ terme fini dans

$$\int \frac{1}{k^2} \frac{1}{(k-p)^2} d^D k = -\frac{1}{3} \pi^3 p^2 \frac{1}{z} + \frac{1}{6} \pi^3 p^2 \log p^2 + \text{cst.}$$

Contre-terme $C(\gamma)$ du sous-graphe divergent

$$\int \frac{1}{(k+l)^2} \frac{1}{\ell^2} d^D \ell \rightarrow \int \frac{1}{(k+l)^2} \frac{1}{\ell^2} d^D \ell + \frac{1}{3} \pi^3 k^2 \frac{1}{z}$$

de l'ordre de $k^2 \log k^2$

$$U(\Gamma(p, -p)) + C(\gamma) U(\Gamma/\gamma(p, -p)) = (2\pi)^{-2D}$$

$$\int \frac{1}{k^4} \frac{1}{(k-p)^2} \left(\int \frac{1}{(k+l)^2} \frac{1}{\ell^2} d^D \ell + \frac{1}{3} \pi^3 k^2 \frac{1}{z} \right) d^D k$$

différentiation ∂_p^n donne la convergence, d'où
la localité de la divergence (polynôme en p)

$$\overline{R}(\Gamma) = U(\Gamma) + C(\gamma) U(\Gamma/\gamma)$$

Contre-terme de masse

Sous-divergence devient

$$\int \frac{1}{(k + \ell)^2 + m^2} \frac{1}{\ell^2 + m^2} d^D \ell =$$
$$\pi^{D/2} \Gamma(2 - D/2) \int_0^1 ((x - x^2)k^2 + m^2)^{D/2-2} dx$$
$$(a m^2 + b k^2)^{\frac{1}{z}}$$

$$\bar{R}(\Gamma) = U(\Gamma) + C(\gamma_{(0)})U(\Gamma/\gamma_{(0)}) + C(\gamma_{(1)})U(\Gamma/\gamma_{(1)})$$

Structure externe

$$c_0 m^2 + c_1 k^2$$

$$\sigma_0(f) := m^{-2} \delta_0(f)$$

$$\sigma_1(f) := \left(\frac{d^2}{dk^2} \delta_0 \right)(f) = \left. \frac{\partial^2}{\partial k^2} f(k) \right|_{k=0}$$

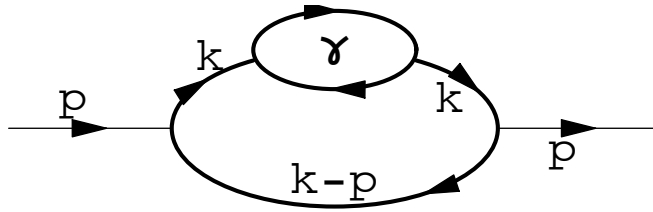
Sommets \times_j



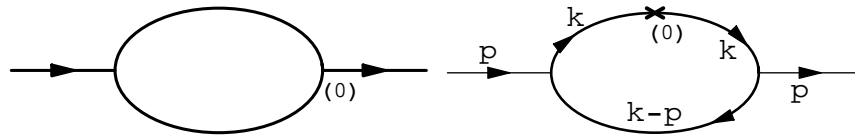
$$(0) \rightarrow m^2$$

$$(1) \rightarrow k^2$$

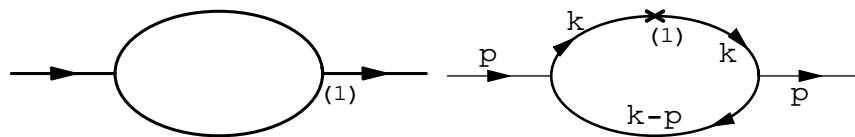
Préparation



+



+



Degré de divergence d'un graphe

$$\text{deg}(\Gamma) = -2I + DL$$

$$I = \text{card } \Gamma_{int}^{(1)}, \quad V = \text{card } \Gamma^{(0)}, \quad I - V = L - 1$$

Exemple ϕ^3 , on ignore les



car ils améliorent la convergence (et = dimension)

$$3V = 2I + N$$

Deux projections de $\{(s, \ell) : s \in \ell\}$

$$\text{deg}(\Gamma) = 6 - 2N + (D - 6)L$$

Sous-graphes

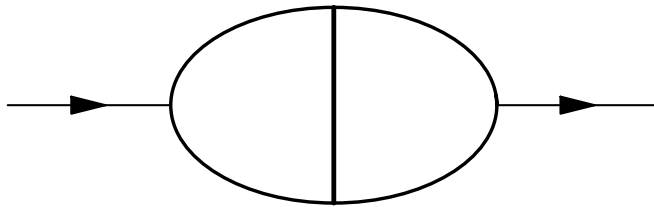
Associé à un sous-ensemble $\gamma \subset \Gamma_{int}^{(1)}$

$\tilde{\gamma}$ le graphe obtenu en dotant chaque composante connexe de $\bar{\gamma}$ des arêtes externes provenant de Γ .

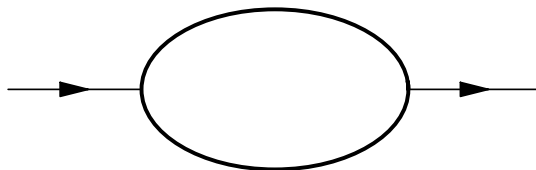
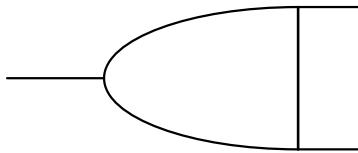
Chaque composante de $\tilde{\gamma}$ doit être un graphe 1PI de la théorie avec degré de divergence positif.

Le graphe Γ/γ doit être un graphe de la théorie.

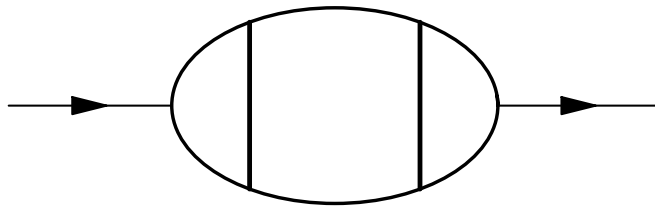
Sous-graphes ϕ^3 , $L = 2$



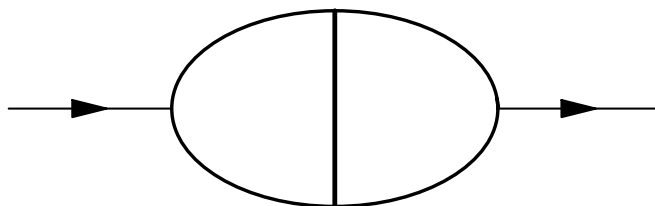
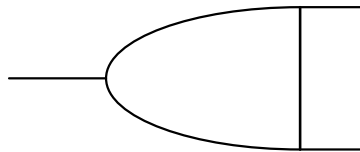
deux sous-graphes de la forme



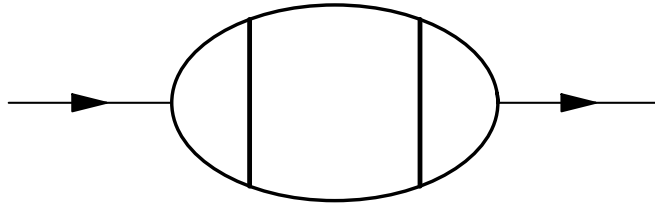
Sous-graphes ϕ^3 , $L = 3$



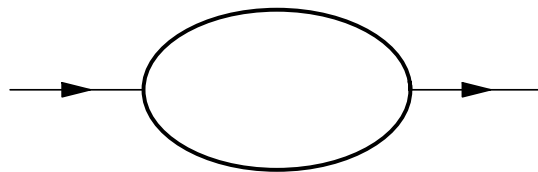
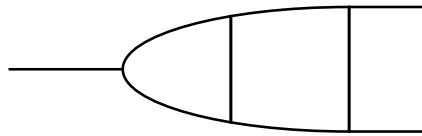
deux sous-graphes de la forme



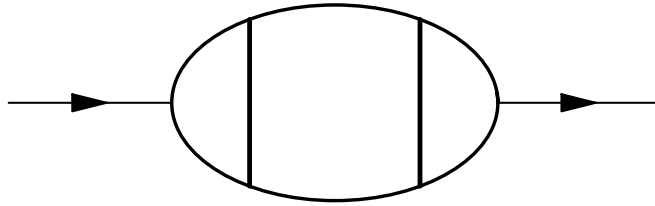
$L = 3$ suite



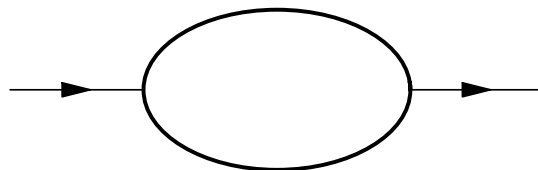
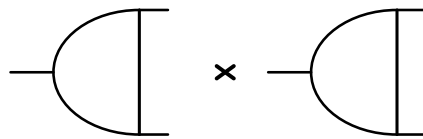
deux sous-graphes de la forme



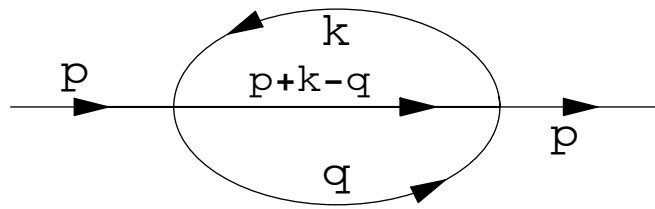
$L = 3$ fin



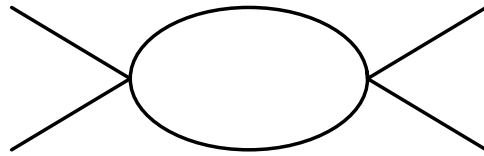
un sous-graphe de la forme



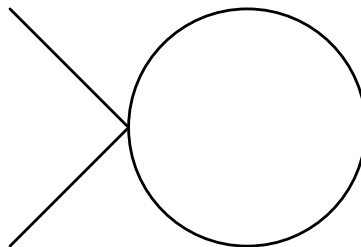
Sous-graphes ϕ^4



Trois sous-graphes de la forme $\gamma \equiv$



Γ/γ



Bogoliubov–Parasiuk–Hepp–Zimmermann

Préparation

On prépare d'abord un graphe Γ , en remplaçant la valeur non-renormalisée $U(\Gamma)$ par

$$\bar{R}(\Gamma) = U(\Gamma) + \sum_{\gamma \subset \Gamma} C(\gamma)U(\Gamma/\gamma)$$

Contre-termes

$$C(\Gamma) = -T(\bar{R}(\Gamma)) = \\ -T \left(U(\Gamma) + \sum_{\gamma \subset \Gamma} C(\gamma)U(\Gamma/\gamma) \right)$$

Valeur renormalisée

$$R(\Gamma) = \bar{R}(\Gamma) + C(\Gamma) = \\ U(\Gamma) + C(\Gamma) + \sum_{\gamma \subset \Gamma} C(\gamma)U(\Gamma/\gamma)$$

Théorème BPHZ

Si l'on calcule avec le Lagrangien

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left(1 - \sum_{\text{---}\bullet} \frac{C(\Gamma_{(1)})}{\sigma(\Gamma)} \right) (\partial\phi)^2 + \\ & \frac{m^2}{2} \left(1 - \sum_{\text{---}\bullet} \frac{C(\Gamma_{(0)})}{\sigma(\Gamma)} \right) \phi^2 + \\ & \frac{g}{6} \left(1 - \sum_{\text{---}\bullet} \frac{C(\Gamma)}{\sigma(\Gamma)} \right) \phi^3 \end{aligned}$$

on obtient la valeur renormalisée

$$C(\Gamma) = C(\Gamma_{(0)})m^2 + C(\Gamma_{(1)})p^2$$

Nouveaux sommets avec un indice γ 1PI. Tout graphe G permet de reconstituer un Γ de la théorie initiale.

$$\frac{1}{\sigma(G)} \prod \frac{C(\gamma_i)}{\sigma(\gamma_i)}$$

$K(\gamma)$ = nombre de choix de l'inclusion $\gamma \subset \Gamma$
avec $\Gamma/\gamma = G$

$$\frac{K(\gamma)}{\sigma(\Gamma)} = \frac{1}{\sigma(G) \prod \sigma(\gamma_i)}$$

Schémas, Dessins d'enfants

- C peut être définie sur $\bar{\mathbb{Q}}$
- C est la compactification d'un revêtement fini non-ramifié de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ dont on a enlevé les trois points $\{0, 1, \infty\}$.
- C est isomorphe à la compactification du quotient du demi-plan de Poincaré par un sous-groupe d'indice fini de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$.
- En tant que variété conforme C est obtenue en recollant entre eux un nombre fini de triangles équilatères (dotés de la structure conforme Euclidienne).

$$1 \rightarrow \pi_1^{\text{etale}}(X_{\bar{\mathbb{Q}}}) \rightarrow \pi_1^{\text{etale}}(X_{\mathbb{Q}}) \rightarrow \mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \rightarrow 1$$

J. Bernstein, *The analytic continuation of generalized functions with respect to a parameter*, *Funct. Anal. Appl.* Vol. 6 no 4 (1972) 273–285.

J. Collins, *Renormalization*, Cambridge Monographs in Math. Physics, Cambridge University Press, 1984.

P. Etingof, *Note on dimensional regularization*, in “Quantum Fields and Strings : a Course for Mathematicians”, Vol.I, pp. 595–607. American Mathematical Society, 1999.

Transparents du cinquième cours

- Algèbre de Hopf des graphes
- Birkhoff
- $\partial_\mu \gamma_\mu^- = 0$
- Correspondance de Riemann-Hilbert

Graphe de Feynman $\text{Graph}(\mathcal{T})$

Complexe simplicial de dimension 1,

$\Gamma^{(0)}$ sommets, $\Gamma^{(1)}$ arêtes

$$\partial_j : \Gamma^{(1)} \rightarrow \Gamma^{(0)} \cup \{1, 2, \dots, N\}, \quad \forall j \in \{0, 1\}$$

$$\iota : \Gamma^{(0)} \rightarrow J$$

où J est l'ensemble de tous les monômes de \mathcal{L} .

$$\deg \iota(v) = \sum \text{card } \partial_j^{-1}\{v\}, \quad \forall v \in \Gamma^{(0)}$$

Sous-graphes

$$\Gamma \in \text{Graph}(\mathcal{T})$$

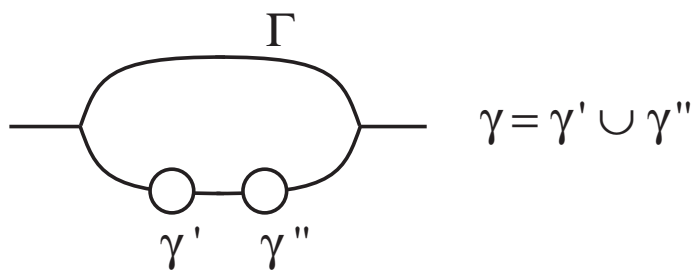
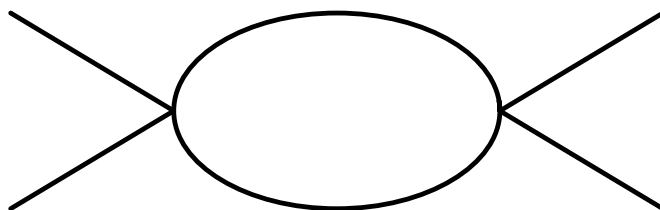
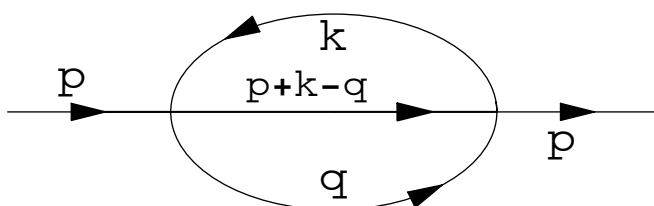
Sous-graphe = (γ, χ) , $\gamma \subset \Gamma_{int}^{(1)}$ et

$$\chi : \{\text{composantes de } |\gamma| \subset |\Gamma|\} \rightarrow J$$

Chaque composante $\gamma_i \subset \Gamma_{int}^{(1)} \rightarrow \delta = \tilde{\gamma}_i$

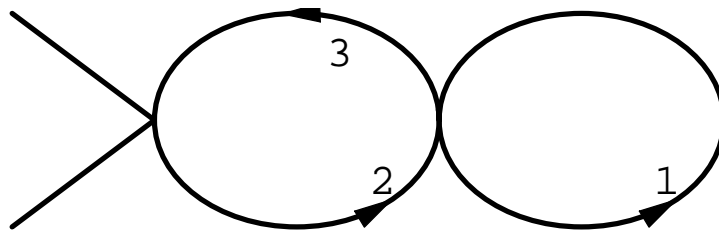
- Arêtes internes $\delta_{int}^{(1)} = \gamma_i$
- Sommets $\delta^{(0)} = \Gamma^{(0)} \cap |\gamma_i|$
- Arêtes externes en $v =$ union disjointe des $\partial_j^{-1}(v) \cap \gamma_i^c$
- Applications ∂_j et ι par restriction de Γ

Sous-graphes



Graphe contracté Γ/γ

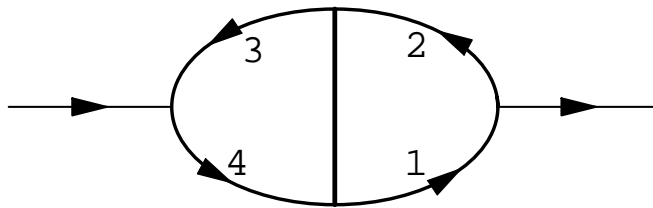
- Arêtes internes $\Gamma_{int}^{(1)} \setminus \gamma$
- Sommets = union disjointe de $\Gamma^{(0)} \setminus |\gamma|$ avec l'ensemble des composantes de $|\gamma|$
- Arêtes externes comme Γ
- Applications ∂_j par restriction de celles de Γ
- Application ι par restriction sur $\Gamma^{(0)} \setminus |\gamma|$ et χ sur l'ensemble des composantes de $|\gamma|$



Sous-graphe

Soit $\Gamma \in \text{Graph}(\mathcal{T})$, un *sous-graphe* de Γ est un couple (γ, χ) tel que

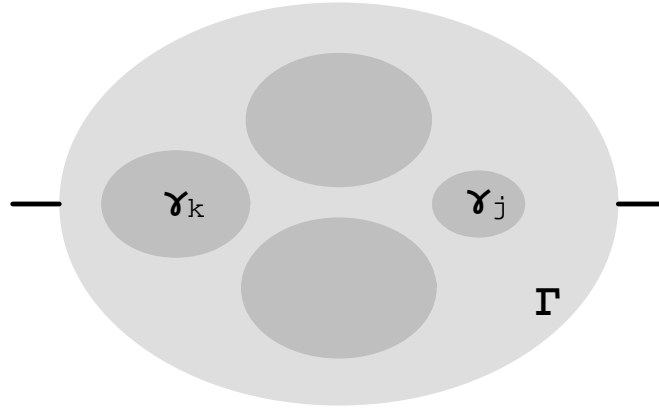
1. Les composantes de γ sont des graphes 1PI.
2. $\Gamma/\gamma \in \text{Graph}(\mathcal{T})$



Condition équivalente :

$$\deg \chi(\gamma_i) = \text{nombre d'arêtes externes de } \tilde{\gamma}_i$$

$$\Gamma/\gamma \text{ 1PI} \Leftrightarrow \Gamma \text{ 1PI}$$



$$\pi : |\Gamma| \rightarrow |\Gamma/\gamma|$$

Extension des règles de Feynman

$$\text{---}_*^0 \rightarrow -\frac{1}{2}m^2\phi^2 \rightarrow m^2\delta$$

$$\text{---}_*^1 \rightarrow -\frac{1}{2}(\partial\phi)^2 \rightarrow k^2\delta$$

$(\sigma_\iota), \iota \in J$, base duale des monômes du Lagrangien

BPHZ

Préparation

On prépare d'abord un graphe Γ , en remplaçant la valeur non-renormalisée $U(\Gamma)$ par

$$\bar{R}(\Gamma) = U(\Gamma) + \sum_{\gamma \prec \Gamma} C(\gamma)U(\Gamma/\gamma)$$

Contre-termes

$$C(\Gamma) = -T(\bar{R}(\Gamma)) =$$
$$-T \left(U(\Gamma) + \sum_{\gamma \prec \Gamma} C(\gamma)U(\Gamma/\gamma) \right)$$

Valeur renormalisée

$$R(\Gamma) = \bar{R}(\Gamma) + C(\Gamma) =$$
$$U(\Gamma) + C(\Gamma) + \sum_{\gamma \prec \Gamma} C(\gamma)U(\Gamma/\gamma)$$

Théorème BPHZ

Si l'on calcule avec le Lagrangien

$$\mathcal{L}_E = \sum_{\iota(\Gamma^{(0)}) \subset I} \frac{C(\Gamma)}{\sigma(\Gamma)}$$

on obtient la valeur renormalisée

$$\frac{1}{2} \left(1 - \sum_{\ominus} \frac{C(\Gamma_{(1)})}{\sigma(\Gamma)} \right) (\partial\phi)^2 +$$
$$\frac{m^2}{2} \left(1 - \sum_{\ominus} \frac{C(\Gamma_{(0)})}{\sigma(\Gamma)} \right) \phi^2 - \frac{g}{6} \left(1 + \sum_{\ominus} \frac{C(\Gamma)}{\sigma(\Gamma)} \right) \phi^3$$

Algèbres de Hopf = Schémas en groupe affine

$$\begin{aligned}
 (\Delta \otimes id)\Delta &= (id \otimes \Delta)\Delta && : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}^{\otimes_k 3}, \\
 (id \otimes \varepsilon)\Delta &= id = (\varepsilon \otimes id)\Delta && : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}, \\
 m(id \otimes S)\Delta &= m(S \otimes id)\Delta = 1 \varepsilon && : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H},
 \end{aligned}$$

Foncteur covariant

$$G(A) = \text{Hom}_{\mathcal{A}_k}(\mathcal{H}, A).$$

$$\phi : \mathcal{H} \rightarrow A, \quad \phi(xy) = \phi(x)\phi(y), \quad \forall x, y \in \mathcal{H},$$

$$\phi_1 \star \phi_2 (x) = \langle \phi_1 \otimes \phi_2, \Delta(x) \rangle.$$

Exemples

Groupe additif

$$G = \mathbb{G}_a, \mathcal{H} = k[t], \Delta(t) = t \otimes 1 + 1 \otimes t$$

Groupe multiplicatif

$$G = \mathbb{G}_m, \mathcal{H} = k[t, t^{-1}], \Delta(t) = t \otimes t.$$

Racines de l'unité

$$\mu_n, \mathcal{H} = k[t]/(t^n - 1),$$

$$G = \mathrm{GL}_n$$

$$\mathcal{H} = k[x_{i,j}, t]_{i,j=1,\dots,n} / \det(x_{i,j})t - 1,$$

Algèbre de Lie

Lie G est un foncteur covariant vers la catégorie \mathcal{L}_k des algèbres de Lie

$$L(XY) = L(X)\varepsilon(Y) + \varepsilon(X)L(Y), \quad \forall X, Y \in \mathcal{H},$$

$$[L_1, L_2](X) = \langle L_1 \otimes L_2 - L_2 \otimes L_1, \Delta(X) \rangle.$$

Milnor-Moore

Soit \mathcal{H} une algèbre de Hopf commutative sur k (caractéristique zéro). On suppose \mathcal{H} graduée positivement et connexe, $\mathcal{H} = \bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{H}_n$, avec $\mathcal{H}_0 = k$, \mathcal{H}_n de dimension finie. Soit \mathcal{H}^\vee la duale et \mathcal{L} l'algèbre de Lie des éléments primitifs de \mathcal{H}^\vee . On a un isomorphisme canonique d'algèbres de Hopf

$$\mathcal{H} \cong U(\mathcal{L})^\vee,$$

où $U(\mathcal{L})$ est l'algèbre enveloppante de \mathcal{L} . De plus, $\mathcal{L} = \text{Lie } G(k)$ comme algèbre de Lie graduée.

Algèbre de Hopf des graphes

\mathcal{T} théorie renormalisable $\rightarrow \mathcal{H}(\mathcal{T})$ engendrée par $\{(\Gamma, w)\}$

$\Gamma \in \text{Graph}(\mathcal{T})$ est 1PI, $w \in J$ de degré le nombre d'arêtes externes de Γ

Coproduit

$$\Delta(\Gamma) = \Gamma \otimes 1 + 1 \otimes \Gamma + \sum_{\gamma \prec \Gamma} \gamma \otimes \Gamma/\gamma$$

$$\gamma = \prod (\tilde{\gamma}_i, \chi(\gamma_i))$$

$\Gamma/\gamma \sim (\Gamma/\gamma, w)$ avec le même w que Γ

$$\mathcal{H}(\mathcal{T}) = \mathbf{Hopf}$$

$$(\Delta \otimes \text{id}) \Delta = (\text{id} \otimes \Delta) \Delta$$

à vérifier sur les générateurs

$$\Delta \Gamma = \sum_{\gamma \preceq \Gamma} \tilde{\gamma} \otimes \Gamma / \gamma$$

$$(\Delta \otimes \text{id}) \Delta \Gamma = \sum_{\gamma \preceq \Gamma} \Delta \tilde{\gamma} \otimes \Gamma / \gamma$$

$$\Delta(\tilde{\gamma}) = \prod \Delta(\tilde{\gamma}_j)$$

$$\Delta(\tilde{\gamma}) = \sum_{\gamma' \preceq \tilde{\gamma}} \tilde{\gamma}' \otimes \tilde{\gamma} / \gamma'$$

notation étendue au cas non connexe

On pose $\gamma' = \cup \gamma'_j$ d'où $\gamma' \subset \gamma$

$$\gamma' \preceq \Gamma \Leftrightarrow (\gamma_j \cap \gamma') \preceq \tilde{\gamma}_j, \quad \forall j$$

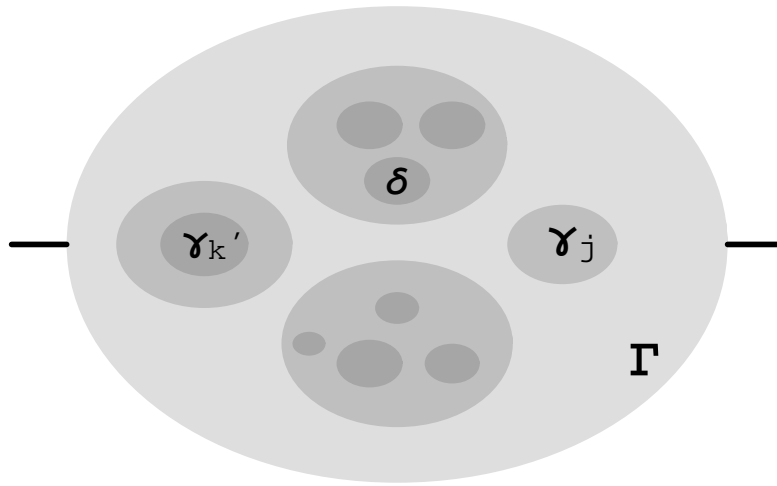
Composante δ de $\gamma' \subset$ composante γ_j de γ

$\tilde{\delta}$ indépendant du contexte

$$(\Delta \otimes \text{id}) \Delta \Gamma = \sum_{\gamma' \preceq \gamma \preceq \Gamma} \tilde{\gamma}' \otimes \tilde{\gamma}/\gamma' \otimes \Gamma/\gamma$$

$$\gamma \preceq \Gamma, \quad \gamma' \preceq \Gamma, \quad \gamma' \subset \gamma$$

$$(\text{id} \otimes \Delta) \Delta \Gamma = \sum_{\gamma' \preceq \Gamma} \tilde{\gamma}' \otimes \Delta(\Gamma/\gamma')$$



Il reste à montrer que

$$\Delta(\Gamma/\gamma') = \sum_{\gamma \preceq \Gamma, \gamma \supset \gamma'} \tilde{\gamma}/\gamma' \otimes \Gamma/\gamma$$

$\Gamma' = \Gamma/\gamma'$ graphe contracté

$$\gamma \supset \gamma' \Leftrightarrow \rho(\gamma) = \gamma'' = \gamma \setminus \gamma'$$

$$\gamma \preceq \Gamma \Leftrightarrow \rho(\gamma) \preceq \Gamma', \quad \tilde{\gamma}/\gamma' = \rho(\tilde{\gamma}), \quad \Gamma/\gamma = \Gamma'/\rho(\gamma)$$

$$\pi : |\Gamma| \rightarrow |\Gamma/\gamma'|$$

$\pi(x) = \pi(y) \Leftrightarrow x$ et y dans la même
composante de $|\gamma'| \Rightarrow$ même comp. de $|\gamma|$

Les $\pi(\gamma_j)$ sont disjoints et sont les
composantes γ_j'' de γ'' sous-graphe de Γ'

Pour chaque composante γ_i de γ on a

$$\tilde{\gamma}_i/\gamma' = \tilde{\gamma}_i'' \text{ avec } \gamma_i'' = \gamma_i \setminus \gamma'$$

$$\tilde{\gamma}_i \text{ 1PI} \Leftrightarrow \tilde{\gamma}_i'' \text{ 1PI}$$

$$\Gamma'/\gamma'' = \Gamma/\gamma \text{ i.e. } (\Gamma/\gamma')/\gamma'' = \Gamma/\gamma$$

Arêtes internes = complément de $\gamma = \gamma' \cup \gamma''$
dans $\Gamma_{int}^{(1)}$

Sommets, on passe au quotient en deux
étapes

Application χ

$$\Delta(-\bigcirc-) = -\bigcirc- \otimes 1 + 1 \otimes -\bigcirc-$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta(-\bigoplus-) = -\bigoplus- \otimes 1 + 1 \otimes -\bigoplus- + \\ 2 \text{---}\triangleleft \otimes -\bigcirc- \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta(-\text{---}\square\text{---}) = \text{---}\square\text{---} \otimes 1 + 1 \otimes \text{---}\square\text{---} \\ + 2 \text{---}\triangleleft \otimes -\bigcirc- + 2 \text{---}\triangleleft \otimes -\bigoplus- \\ + \text{---}\triangleleft \text{---}\triangleleft \otimes -\bigcirc- \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta(-\bigcirc\bigcirc-) = \bigcirc\bigcirc- \otimes 1 + 1 \otimes \bigcirc\bigcirc- \\ + \text{---}\bigcirc_{(i)} \otimes \text{---}\bigcirc_{\times i} \end{array} \right.$$

Graduations

$$\deg(\Gamma_1 \cdots \Gamma_r) = \sum_i \deg(\Gamma_i) \quad \text{and} \quad \deg(1) = 0.$$

$b_1(\Gamma)$ = nombre de boucles

$$\ell(\Gamma) = \text{Card } \Gamma_{int}^{(1)}, \quad \ell(\prod \Gamma_j) = \sum \ell(\Gamma_j)$$

Les \mathcal{H}_n sont de dimension finie

$$v(\Gamma) = \text{Card } \Gamma^{(0)} - 1, \quad v(\prod \Gamma_j) = \sum v(\Gamma_j)$$

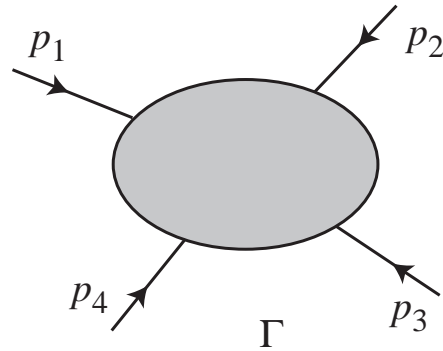
Algèbre de Lie de $\text{Difg}(\mathcal{T})$

$$[(\Gamma, w), (\Gamma', w')] = \sum_{v, \iota(v)=w'} (\Gamma \circ_v \Gamma', w) - \sum_{v', \iota(v')=w} (\Gamma' \circ_{v'} \Gamma, w')$$

où $\Gamma \circ_v \Gamma'$ s'obtient en insérant Γ' dans Γ au sommet v de Γ

(Il y a plusieurs manières d'insérer)

Structure externe



$$C_c^{-\infty}(E) = \bigoplus_{\Gamma} C_c^{-\infty}(E_{\Gamma})$$

$$\tilde{\mathcal{H}}(\mathcal{T}) = \text{Sym}(C_c^{-\infty}(E))$$

$$\Delta(\Gamma, \sigma) = (\Gamma, \sigma) \otimes 1 + 1 \otimes (\Gamma, \sigma) +$$

$$\sum_{\gamma \prec \Gamma} (\gamma, \sigma_{\chi(\gamma)}) \otimes (\Gamma/\gamma, \sigma)$$

$$(\gamma, \sigma_{\chi(\gamma)}) = \prod (\tilde{\gamma}_i, \sigma_{\chi(\gamma_i)})$$

$$\widetilde{\text{Difg}}(\mathcal{T}) = \text{Difg}_{ab}(\mathcal{T}) \times \text{Difg}(\mathcal{T}),$$

$$\mathcal{L} = C^\infty(E), \quad L = (f_\Gamma), \quad f_\Gamma \in C^\infty(E_\Gamma)$$

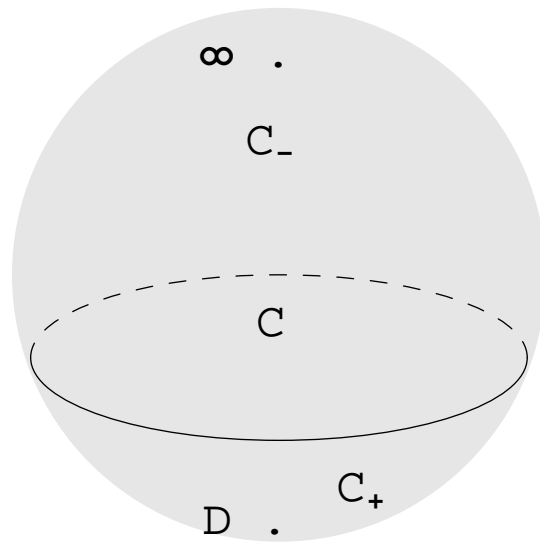
$$\langle Z_L, (\Gamma, \sigma) \rangle := \sigma(f^\Gamma)$$

$$[L_1, L_2]^\Gamma = \sum_{\gamma \in \mathcal{V}_c(\Gamma), w} \sigma_w(f_1^\gamma) f_2^{\Gamma/\gamma} - \sigma_w(f_2^\gamma) f_1^{\Gamma/\gamma}$$

$$L = (f_\Gamma) \in \mathcal{L}_{ab} \Leftrightarrow \sigma_w(f^\gamma) = 0, \quad \forall w \in J$$

Décomposition de Birkhoff

Fibrés holomorphes sur la sphère



$$\gamma(z) = \gamma_-(z)^{-1} \lambda(z) \gamma_+(z) \quad z \in C$$

$$\lambda(z) = \begin{pmatrix} z^{k_1} & & & \\ & z^{k_2} & & \\ & & \dots & \\ & & & z^{k_n} \end{pmatrix}$$

Décomposition de Birkhoff

Théorème (ac+dk)

Soit $\phi : \mathcal{H} \rightarrow K = \mathbb{C}(\{z\}) = \mathbb{C}\{z\}[z^{-1}]$ un homomorphisme d'algèbre. La décomposition de Birkhoff du lacet correspondant est donnée par récurrence par

$$\phi_{-}(X) = -T \left(\phi(X) + \sum \phi_{-}(X')\phi(X'') \right)$$

et

$$\phi_{+}(X) = \phi(X) + \phi_{-}(X) + \sum \phi_{-}(X')\phi(X'').$$

Cela coïncide avec BPHZ !

$$\phi = U, \quad \phi_{-} = C, \quad \text{et} \quad \phi_{+} = R$$

$$\Delta(X) = X \otimes 1 + 1 \otimes X + \sum X' \otimes X''.$$

$$(\text{Id} \otimes \varepsilon) \circ \Delta = \text{Id}, \quad (\varepsilon \otimes \text{Id}) \circ \Delta = \text{Id}$$

$$\begin{aligned} \Delta(XY) &= XY \otimes 1 + 1 \otimes XY + X \otimes Y + Y \otimes X \\ &\quad + XY' \otimes Y'' + Y' \otimes XY'' + X'Y \otimes X'' \\ &\quad + X' \otimes X''Y + X'Y' \otimes X''Y'' \end{aligned}$$

↓

$$\begin{aligned} \phi_-(XY) &= \\ &= -T(\phi(XY)) - T(\phi_-(X) \phi(Y) + \phi_-(Y) \phi(X) + \\ &\quad \phi_-(XY') \phi(Y'') + \phi_-(Y') \phi(XY'') + \phi_-(X'Y) \phi(X'') \\ &\quad + \phi_-(X') \phi(X''Y) + \phi_-(X'Y') \phi(X''Y'')) \end{aligned}$$

Réurrence

$\phi_-(AB) = \phi_-(A) \phi_-(B)$, pour
 $\deg A + \deg B < \deg X + \deg Y$

$$\phi_-(XY) =$$

$$-T(\phi(X) \phi(Y) + \phi_-(X) \phi(Y) + \phi_-(Y) \phi(X))$$

$$+ \phi_-(X) \phi_-(Y') \phi(Y'') + \phi_-(Y') \phi(X) \phi(Y'')$$

$$+ \phi_-(X') \phi_-(Y) \phi(X'')$$

$$+ \phi_-(X') \phi(X'') \phi(Y) + \phi_-(X') \phi_-(Y') \phi(X'') \phi(Y'')$$

et

$$T(f) T(h) = -T(fh) + T(T(f) h) + T(f T(h))$$

$$f = \phi(X) + \phi_-(X') \phi(X'')$$

$$h = \phi(Y) + \phi_-(Y') \phi(Y'')$$

$$\begin{aligned}
& \phi_{-}(X) \phi_{-}(Y) = \\
& -T((\phi(X) + \phi_{-}(X') \phi(X'')) (\phi(Y) + \phi_{-}(Y') \phi(Y''))) \\
& +T(T(\phi(X) + \phi_{-}(X') \phi(X'')) (\phi(Y) + \phi_{-}(Y') \phi(Y''))) \\
& +T((\phi(X) + \phi_{-}(X') \phi(X'')) T(\phi(Y) + \phi_{-}(Y') \phi(Y''))) \\
& \text{et}
\end{aligned}$$

$$T(f) = -\phi_{-}(X), \quad T(h) = -\phi_{-}(Y)$$

↓

$$\begin{aligned}
& \phi_{-}(X) \phi_{-}(Y) = \\
& -T(\phi(X) \phi(Y) + \phi_{-}(X') \phi(X'') \phi(Y)) \\
& + \phi(X) \phi_{-}(Y') \phi(Y'') + \phi_{-}(X') \phi(X'') \phi_{-}(Y') \phi(Y'') \\
& -T(\phi_{-}(X)(\phi(Y) + \phi_{-}(Y') \phi(Y''))) \\
& -T((\phi(X) + \phi_{-}(X') \phi(X'')) \phi_{-}(Y))
\end{aligned}$$

Décomposition de Birkhoff

Soit \mathcal{T} une théorie renormalisable, $\mathcal{H}(\mathcal{T})$ l'algèbre de Hopf (discrete) et $\text{Difg}(\mathcal{T})$ le groupe. Les termes ϕ_- et ϕ_+ de la décomposition de Birkhoff du morphisme U donnent respectivement les contre-termes et la valeur renormalisée pour la méthode BPHZ appliquée à la théorie \mathcal{T}' avec sommets associés à J .

Paramètre μ

Graduation

$$\theta_t \in \text{Aut}(\text{Difg}(\mathcal{T})), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \frac{d}{dt} \theta_t |_{t=0} = Y$$

$$Y(X) = n X, \quad \forall X \in \mathcal{H}_n^\vee(\mathcal{T})$$

$$\langle \theta_t(u), x \rangle = \langle u, \theta_t(x) \rangle, \quad \forall x \in \mathcal{H}, u \in \mathcal{H}^\vee$$

$$U_\mu^z(\Gamma) = \mu^{zL} \int \frac{P(\kappa, p)}{\prod_j F_j(\kappa, p)^2 + m_j^2} \prod d\kappa_\ell^{D-z}$$

↓

$$\gamma_{e^{t\mu}}(z) = \theta_{tz}(\gamma_\mu(z))$$

Soit $\gamma_\mu(z) \in \text{Difg}(\mathcal{T})$ le lacet des valeurs non-renormalisées $U_\mu^z(\Gamma)$. Soit $\gamma_\mu(z) = \gamma_{\mu^-}(z)^{-1} \gamma_{\mu^+}(z)$ sa décomposition de Birkhoff, alors

$$\frac{\partial}{\partial \mu} \gamma_{\mu^-}(z) = 0.$$

- Les contre-termes de la théorie \mathcal{T}' dépendent de manière polynômiale des paramètres massifs (μ non compris).
- Seules les puissances de $\log \mu$ pourraient apparaître.
- Par analyse dimensionnelle ces termes sont exclus.

$$\log(p^2/\mu^2)$$

et

$$\log(M^2/\mu^2)$$

Equations différentielles linéaires

Equation linéaire $\sim \frac{dy}{dz} + A(z)y(z) = 0$

Exemples : 1) Hypergéométrique

$$x(1-x)y'' + (c - (a+b+1)x)y' - aby = 0$$

dont l'une des solutions est

$$F(a, b, c; x) = 1 + \frac{ab}{c}x + \frac{a(a+1)b(b+1)}{2!c(c+1)}x^2 + \dots$$

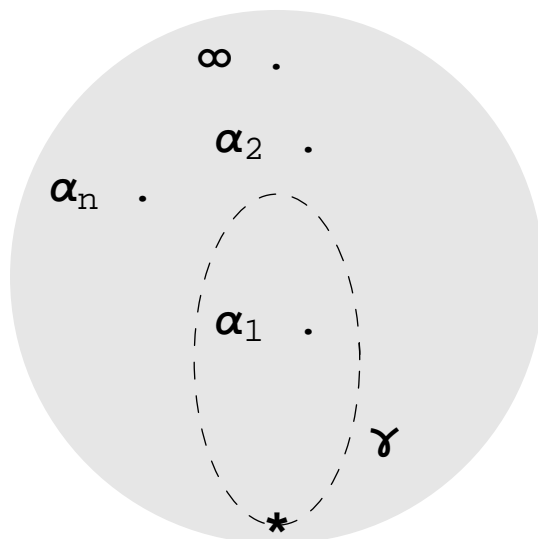
2) Prolate

$$(x^2 - \Lambda^2)y'' + 2xy' + \Lambda^2 x^2 y = 0$$

3) Singulier irrégulier

$$x^2 y' + y = 0$$

Monodromie



$$\nabla = d + A(z) dz$$

Connection plate

$$\rho : \pi_1(X - S, \star) \rightarrow \text{GL}(\text{Sol}_\star)$$

Exemples

1) $D = x \frac{d}{dx} - \alpha$, on a $S = \{0, \infty\}$, $\rho = e^{2\pi i \alpha}$

2) $D = x \left(\frac{d}{dx}\right)^2 + \frac{d}{dx}$ on a $S = \{0, \infty\}$,

$$\rho = \begin{bmatrix} 1 & 2\pi i \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3) $D = x^2 \frac{d}{dx} + 1$, on a $S = \{0\}$, et pas de monodromie.

4) Hypergéométrique : Les valeurs propres de $\rho(\gamma)$ sont les e^ν avec les ν donnés sur $S = \{0, 1, \infty\}$ par

$$0 \rightarrow \{0, 1-c\} \quad 1 \rightarrow \{a, b\} \quad \infty \rightarrow \{0, c-a-b\}$$

Singularités régulières

$$D = \delta^n + b_{n-1} \delta^{n-1} + \dots + b_0, \quad \delta = x \frac{d}{dx}, \quad b_j \in \mathbb{C}\{x\}$$



$$|x|^\mu |y(x)| < C, \quad \forall x, \alpha < \text{Arg } x < \beta$$

Correspondance de Riemann-Hilbert

Equation régulière singulière



Représentation de monodromie

Transparents du sixième cours

- Correspondance de Riemann-Hilbert**
- Groupe de Renormalisation**
- Expansionnelle**
- Connections équivariantes**

Singularités régulières

$$D = \delta^n + b_{n-1} \delta^{n-1} + \dots + b_0, \quad \delta = x \frac{d}{dx}, \quad b_j \in \mathbb{C}\{x\}$$



$$|x|^\mu |y(x)| < C, \quad \forall x, \alpha < \text{Arg } x < \beta$$

Correspondance de Riemann-Hilbert

Equation régulière singulière



Représentation de monodromie

Correspondance inverse

$$\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \{a_1, \dots, a_n\} = U$$

$$\Gamma \simeq \pi_1(U, x_0) \text{ et } G = \text{GL}_n(\mathbb{C})$$

G -fibré plat P sur U

$$P = \tilde{U} \times G / \sim \quad (\tilde{z}, g) \sim (\ell \tilde{z}, \rho(\ell)g), \quad \forall \ell \in \Gamma$$

$$\xi(\tilde{z}) = (\tilde{z}, 1) / \sim \quad \xi(\tilde{z}) = \xi(\ell \tilde{z}) \rho(\ell), \quad \forall \ell \in \Gamma$$

Section holomorphe globale γ_U de P

$$\xi(\tilde{z}) = \gamma_U(z) \sigma(\tilde{z}), \quad \sigma(\tilde{z}) = \sigma(\ell \tilde{z}) \rho(\ell)$$

$$A(\tilde{z}) = -\frac{d\sigma(\tilde{z})}{dz} \sigma(\tilde{z})^{-1}, \quad A(\tilde{z}) = A(\ell \tilde{z})$$

Birkhoff → régulier singulier

Disque Δ autour de $a_1 = 0$, $\Delta^* = \Delta \setminus \{0\}$, V
composante de $p^{-1}(\Delta^*)$, $p : \tilde{U} \rightarrow U$

$$p/V \sim (\log r, \theta) \rightarrow r e^{i\theta}$$

$$\exp(2\pi i \eta) = \rho(\ell) \in G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$$

$$\gamma_{\Delta}(\tilde{z}) = \exp(\eta \log r) \exp(\eta i\theta)$$

$$\gamma(z) = \sigma(\tilde{z}) \gamma_{\Delta}(\tilde{z})^{-1}, \quad \Delta^* \rightarrow G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$$

$$\gamma(z) = \gamma_-(z)^{-1} \lambda(z) \gamma_+(z) \quad z \in \Delta^*$$

$$\lambda(z) = \begin{pmatrix} z^{k_1} & & & \\ & z^{k_2} & & \\ & & \dots & \\ & & & z^{k_n} \end{pmatrix}$$

Groupe de renormalisation

Classe $L(G(\mathbb{C}), \mu)$

$$\gamma_{e^t \mu}(z) = \theta_{tz}(\gamma_\mu(z))$$

$$\frac{\partial}{\partial \mu} \gamma_{\mu^-}(z) = 0.$$

1. Le lacet $\gamma_-(z) \theta_{tz}(\gamma_-(z)^{-1})$ est régulier en $z = 0$.

2. La limite

$$F_t = \lim_{z \rightarrow 0} \gamma_-(z) \theta_{tz}(\gamma_-(z)^{-1})$$

sous-groupe à 1-paramètre de $G(\mathbb{C})$. $F_t(X)$ est polynomial en t , $X \in \mathcal{H}$.

3. Générateur de F_t est $\beta := Y \text{ Res } \gamma$,

4. $\gamma_{\mu^+}(z)$ partie positive de Birkhoff de $\gamma_\mu(z)$

$$\gamma_{e^t \mu^+}(0) = F_t \gamma_{\mu^+}(0), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

$\gamma_-(z)$ est le Birkhoff₋ de $\gamma_\mu(z)$ et
 $\theta_{-tz}(\gamma_\mu(z)) = \gamma_{e^{-t}\mu}(z),$

⇓

$\gamma_-(z) \gamma_\mu(z)$ et $y(z) := \gamma_-(z) \theta_{-tz}(\gamma_\mu(z))$
réguliers en $z = 0$.

⇓

$\theta_{tz}(y(z)) = \theta_{tz}(\gamma_-(z)) \gamma_\mu(z)$ régulier en $z = 0$,
et le rapport aussi

$$\gamma_-(z) \theta_{tz}(\gamma_-(z)^{-1}) =$$

$$(\gamma_-(z) \gamma_\mu(z)) (\theta_{tz}(\gamma_-(z)) \gamma_\mu(z))^{-1}$$

$$F_t = \lim_{z \rightarrow 0} \langle \gamma_-(z) \theta_{tz}(\gamma_-(z)^{-1}), X \rangle$$

$$\langle \theta_t(\gamma), X \rangle = \langle \gamma, \theta_t(X) \rangle, \quad \forall X \in \mathcal{H}, \quad \forall \gamma \in G(\mathbb{C})$$

$$\langle \gamma_-(z) \theta_{tz}(\gamma_-(z)^{-1}), X \rangle =$$

$$\langle \gamma_-(z)^{-1} \otimes \gamma_-(z)^{-1}, (S \otimes \theta_{tz}) \Delta(X) \rangle,$$

$$\langle \gamma_-(z)^{-1}, S X_{(1)} \rangle \langle \gamma_-(z)^{-1}, \theta_{tz} X_{(2)} \rangle =$$

$$P_1 \left(\frac{1}{z} \right) e^{ktz} P_2 \left(\frac{1}{z} \right)$$

↓

$\langle F_t, X \rangle$ polynôme en t

Multiplicativité de F_t

$G(\mathbb{C})$ groupe topologique

$$\gamma_n \rightarrow \gamma \quad \text{ssi} \quad \langle \gamma_n, X \rangle \rightarrow \langle \gamma, X \rangle, \quad \forall X \in \mathcal{H}$$

$$\langle \gamma \gamma', X \rangle = \sum \langle \gamma, X_{(1)} \rangle \langle \gamma', X_{(2)} \rangle$$

$$\lim_{z \rightarrow 0} \theta_{sz}(\gamma_-(z) \theta_{tz}(\gamma_-(z)^{-1})) = F_t$$

$$\begin{aligned} F_{s+t} &= \lim_{z \rightarrow 0} \gamma_-(z) \theta_{(s+t)z}(\gamma_-(z)^{-1}) \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \gamma_-(z) \theta_{sz}(\gamma_-(z)^{-1}) \theta_{sz}(\gamma_-(z) \theta_{tz}(\gamma_-(z)^{-1})) \\ &= F_s F_t \end{aligned}$$

\Downarrow

$$F_{s+t} = F_s F_t, \quad \forall s, t \in \mathbb{R}$$

Action de F_t sur $\gamma_{\mu+}(0)$

$\gamma_{\mu}^+(0)$ est la valeur de $\gamma_-(z) \gamma_{\mu}(z)$ en $z = 0$

$\gamma_{e^t \mu}^+(0)$ celle de $\gamma_-(z) \theta_{tz}(\gamma_{\mu}(z))$, où de $\theta_{-tz}(\gamma_-(z)) \gamma_{\mu}(z)$, en $z = 0$

$$\theta_{-tz}(\gamma_-(z)) \gamma_-(z)^{-1} \rightarrow F_t$$

quand $z \rightarrow 0$

↓

$$\gamma_{e^t \mu+}(0) = F_t \gamma_{\mu+}(0), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

$$\gamma \in L(G(\mathbb{C}), \mu)$$

$$\gamma_-(z)^{-1} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n}{z^n}$$

à coefficients $d_n \in \mathcal{H}^\vee$

⇓

$$Y(d_{n+1}) = d_n \frac{d}{dt} F_t|_{t=0} \quad \forall n \geq 1,$$

$$Y(d_1) = \frac{d}{dt} F_t|_{t=0}.$$

$$\langle \gamma_-(z)^{-1} \otimes \gamma_-(z)^{-1}, (S \otimes \theta_{tz}) \Delta(X) \rangle \rightarrow \langle F_t, X \rangle$$

$$\text{Terme de gauche : } L = \sum P_k(z^{-1}) e^{ktz}$$

$$\partial_t L \rightarrow \partial_t \langle F_t, X \rangle|_{t=0}, \quad z \rightarrow 0$$

↓

$$\left\langle \frac{d}{dt} F_t|_{t=0}, X \right\rangle =$$

$$\lim_{z \rightarrow 0} z \langle \gamma_-(z)^{-1} \otimes \gamma_-(z)^{-1}, (S \otimes Y) \Delta(X) \rangle$$

$$z \langle \gamma_-(z)^{-1} \otimes \gamma_-(z)^{-1}, (S \otimes Y) \Delta(X) \rangle = \text{const.}$$

$$\langle \gamma_-(z)^{-1} \otimes \gamma_-(z)^{-1}, (S \otimes Y) \Delta(X) \rangle = \frac{1}{z} \left\langle \frac{d}{dt} F_t|_{t=0}, X \right\rangle,$$

$$Y(\gamma_-(z)^{-1}) = \frac{1}{z} \gamma_-(z)^{-1} \frac{d}{dt} F_t|_{t=0}.$$

Expansionnelle

- Dyson $\mathcal{T}e^{\int_a^b \alpha(t) dt}$
- Araki “expansionnelle”
- Chen “intégrales itérées”
- Transport parallele $dh(u) = h(u) \alpha(u) du$

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{H}_n, \quad G \text{ et } \alpha(t) \in \text{Lie } G(\mathbb{C})$$

$$\mathcal{T}e^{\int_a^b \alpha(t) dt} := 1 + \sum_1^{\infty} \int_{a \leq s_1 \leq \dots \leq s_n \leq b} \alpha(s_1) \cdots \alpha(s_n) ds_1 \cdots ds_n$$

1. Pour tout $X \in \mathcal{H}$ la somme est finie.
2. $\mathsf{T}e^{\int_a^b \alpha(t) dt} \in G(\mathbb{C})$.
3. C'est la valeur $g(b)$ de l'unique solution $g(t) \in G(\mathbb{C})$ de

$$dg(t) = g(t) \alpha(t) dt, \quad g(a) = 1$$

4. On a

$$\mathsf{T}e^{\int_a^c \alpha(t) dt} = \mathsf{T}e^{\int_a^b \alpha(t) dt} \mathsf{T}e^{\int_b^c \alpha(t) dt}.$$

5. Soit $\rho : G(\mathbb{C}) \rightarrow H$ un homomorphisme vers un groupe de Lie H , alors $\rho(\mathsf{T}e^{\int_a^b \alpha(t) dt})$ est le transport parallèle dans le fibré principal $[a, b] \times H$ avec la connection associée à $\rho(\alpha(t)) dt$.

$X \in \mathcal{H}$ de degré n ,

$$\langle \alpha(s_1) \cdots \alpha(s_m), X \rangle = 0 \quad \forall m > n,$$

$$\partial_t \langle \mathbb{T}e^{\int_a^t \alpha(s) ds}, X \rangle = \langle \mathbb{T}e^{\int_a^t \alpha(s) ds} \alpha(t), X \rangle$$

$$\partial_t \langle \mathbb{T}e^{\int_a^t \alpha(s) ds}, XY \rangle = \langle \mathbb{T}e^{\int_a^t \alpha(s) ds} \alpha(t), XY \rangle =$$

$$\langle \mathbb{T}e^{\int_a^t \alpha(s) ds} \otimes \alpha(t), \Delta(X) \Delta(Y) \rangle$$

$$= \partial_t \left(\langle \mathbb{T}e^{\int_a^t \alpha(s) ds}, X \rangle \right) \langle \mathbb{T}e^{\int_a^t \alpha(s) ds}, Y \rangle$$

$$+ \langle \mathbb{T}e^{\int_a^t \alpha(s) ds}, X \rangle \partial_t \left(\langle \mathbb{T}e^{\int_a^t \alpha(s) ds}, Y \rangle \right)$$

⇓

$$\langle \mathbb{T}e^{\int_a^t \alpha(s) ds}, XY \rangle = \langle \mathbb{T}e^{\int_a^t \alpha(s) ds}, X \rangle \langle \mathbb{T}e^{\int_a^t \alpha(s) ds}, Y \rangle$$

Connection plate

$$\varpi = \alpha(s, t)ds + \eta(s, t)dt$$

$$\partial_s \eta - \partial_t \alpha + [\alpha, \eta] = 0.$$

Soit ϖ plate à valeurs dans $\text{Lie } G(\mathbb{C})$ sur $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ et $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Omega$.

$\text{Te}^{\int_0^1 \gamma^* \varpi}$ ne dépend que de la classe d'homotopie de $[\gamma]$, $a = \gamma(0)$ et $b = \gamma(1)$

Dérivée logarithmique

(K, δ) corps différentiel, $f \mapsto f' := \delta(f)$

$$G(K) = \text{Hom}_{\mathcal{A}_{\mathbb{C}}}(\mathcal{H}, K)$$

$$D(g) := g^{-1} g' \in \text{Lie } G(K), \quad \forall g \in G(K),$$

$$\langle D(g), X \rangle = g^{-1} \star g' (X) = \langle g^{-1} \otimes g', \Delta X \rangle$$

et on a

$$\langle D(g), XY \rangle = \langle D(g), X \rangle \varepsilon(Y) + \varepsilon(X) \langle D(g), Y \rangle$$

Monodromie

$K = \mathbb{C}(\{z\})$, corps différentiel des séries de Laurent convergentes $\delta(f) = \frac{d}{dz}f$

$\mathcal{H} = \bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{H}_n$ connexe, graduée positivement

$\mathcal{H} = \bigcup \mathcal{H}(i)$ avec $\mathcal{H}(i)$ finiment engendrée

$\varpi \in \text{Lie } G(K)$, pour $K = \mathbb{C}(\{z\})$

1. La représentation $M_i(\varpi) : \mathbb{Z} \rightarrow G_i(\mathbb{C})$ est bien définie.
2. La condition de monodromie triviale $M(\varpi) = 1$ est bien définie pour $G(\mathbb{C})$.

$$M_i(\varpi)(\gamma) := \text{T}e^{\int_0^1 \gamma^* \omega_i} \in G_i(\mathbb{C})$$

$$z_i \in \Delta_i^*, \quad M_i(\varpi) : \pi_1(\Delta_i^*, z_i) \rightarrow G_i(\mathbb{C})$$

Exemple

Soit \mathbb{G}_a le groupe additif, $K = \mathbb{C}(\{z\})$ avec $\delta(f) = \frac{d}{dz}f$. On a $\mathbb{G}_a(K) = K$, $D(f) = \delta(f) = f'$, le résidu de $\varpi \in K$ est une obstruction à l'existence de solutions de $D(f) = \varpi$

Monodromie = 1 \Rightarrow solution

$\mathcal{H} = \bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{H}_n$ connexe, graduée positivement

$\mathcal{H} = \bigcup \mathcal{H}(i)$ avec $\mathcal{H}(i)$ finiment engendrée

$\varpi \in \text{Lie } G(K)$, pour $K = \mathbb{C}(\{z\})$

$$g_i(z) = \text{T}e^{\int_{z_i}^z \omega_i} = \text{T}e^{\int_0^1 \gamma^* \omega_i}$$

$$h_i(z) = \langle g_i(z), X \rangle$$

convergente dans Δ_i^* , nombre fini de termes

$z^{N_i} h_i(z)$ bornée dans Δ_i^*

$$p_i : G_{i+1}(\mathbb{C}) \rightarrow G_i(\mathbb{C})$$

surjective

Ne marche pas pour \mathbb{G}_m , $\varpi = \frac{1}{z^2} \in K$

Soit $\gamma_\mu(z) \in L(G(\mathbb{C}), \mu)$ la partie négative de la factorisation de Birkhoff est égale à

$$\gamma_-(z) = \mathbb{T} e^{-\frac{1}{z} \int_0^\infty \theta_{-t}(\beta) dt}$$

$$\gamma_-(z)^{-1} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n}{z^n}$$

$$Y(d_{n+1}) = d_n \beta \quad \forall n \geq 1, \quad Y(d_1) = \beta$$

$$Y^{-1}(X) = \int_0^\infty \theta_{-s}(X) ds,$$

⇓

$$d_n = \int_{s_1 \geq s_2 \geq \dots \geq s_n \geq 0} \theta_{-s_1}(\beta) \theta_{-s_2}(\beta) \dots \theta_{-s_n}(\beta) \prod ds_j$$

$$\begin{aligned} & \mathbb{T}' e^{\int_a^b \alpha(t) dt} := \\ 1 + & \sum_1^\infty \int_{a \leq s_1 \leq \dots \leq s_n \leq b} \alpha(s_n) \cdots \alpha(s_1) ds_1 \cdots ds_n \end{aligned}$$

$$dg(t) = \alpha(t) g(t) dt, \quad g(t) = \mathbb{T}' e^{\int_0^t \alpha(u) du}$$

$$(\mathbb{T}' e^{\int_a^b \alpha(t) dt})^{-1} = \mathbb{T}' e^{-\int_a^b \alpha(t) dt}$$

$$\gamma_-(z)^{-1} = \mathbb{T}' e^{\frac{1}{z}} \int_0^\infty \theta_{-s}(\beta) ds$$

Classification des $\gamma_\mu(z) \in L(G(\mathbb{C}), \mu)$

1. Tout $\gamma_\mu(z)$ est de la forme

$$\gamma_\mu(z) = \mathsf{T} e^{-\frac{1}{z} \int_\infty^{-z \log \mu} \theta_{-t}(\beta) dt} \theta_{z \log \mu}(\gamma_{\text{reg}}(z)),$$

pour un unique $\beta \in \text{Lie } G(\mathbb{C})$, avec $\gamma_{\text{reg}}(z)$ régulier en $z = 0$.

2. La factorisation de Birkhoff de $\gamma_\mu(z)$ est

$$\gamma_{\mu+}(z) =$$

$$\mathsf{T} e^{-\frac{1}{z} \int_0^{-z \log \mu} \theta_{-t}(\beta) dt} \theta_{z \log \mu}(\gamma_{\text{reg}}(z)),$$

$$\gamma_{-}(z) = \mathsf{T} e^{-\frac{1}{z} \int_0^\infty \theta_{-t}(\beta) dt}$$

3. Réciproquement soit $\beta \in \text{Lie } G(\mathbb{C})$ et $\gamma_{\text{reg}}(z)$ régulier, l'expression ci-dessus donne

$$\gamma_\mu \in L(G(\mathbb{C}), \mu)$$

$$\gamma_\mu(z) = \gamma_-(z)^{-1} \gamma_{\mu+}(z)$$

$$\alpha_\mu(z) := \theta_{z \log \mu}(\gamma_-(z)^{-1})$$

$$\alpha_{e^s \mu}(z) = \theta_{sz}(\alpha_\mu(z))$$

$$\alpha_\mu(z)^{-1} \gamma_\mu(z) = \theta_{z \log \mu}(\gamma_{\text{reg}}(z))$$

$$\alpha_\mu(z)^{-1} = \mathsf{T} e^{-\frac{1}{z} \int_{-z \log \mu}^{\infty} \theta_{-t}(\beta) dt}$$

⇓

$$\gamma_\mu(z) = \mathsf{T} e^{-\frac{1}{z} \int_{\infty}^{-z \log \mu} \theta_{-t}(\beta) dt} \theta_{z \log \mu}(\gamma_{\text{reg}}(z))$$

$$\begin{aligned}
\gamma_\mu(z)^{-1} &= \theta_{z \log \mu}(\gamma_{\text{reg}}(z))^{-1} \top e^{-\frac{1}{z} \int_{-z \log \mu}^{\infty} \theta_{-t}(\beta) dt} \\
&= \theta_{z \log \mu}(\gamma_{\text{reg}}(z))^{-1} \top e^{-\frac{1}{z} \int_{-z \log \mu}^0 \theta_{-t}(\beta) dt} \\
&\quad \top e^{-\frac{1}{z} \int_0^{\infty} \theta_{-t}(\beta) dt}
\end{aligned}$$

$\gamma_{-}(z)$ régulier en $1/z$

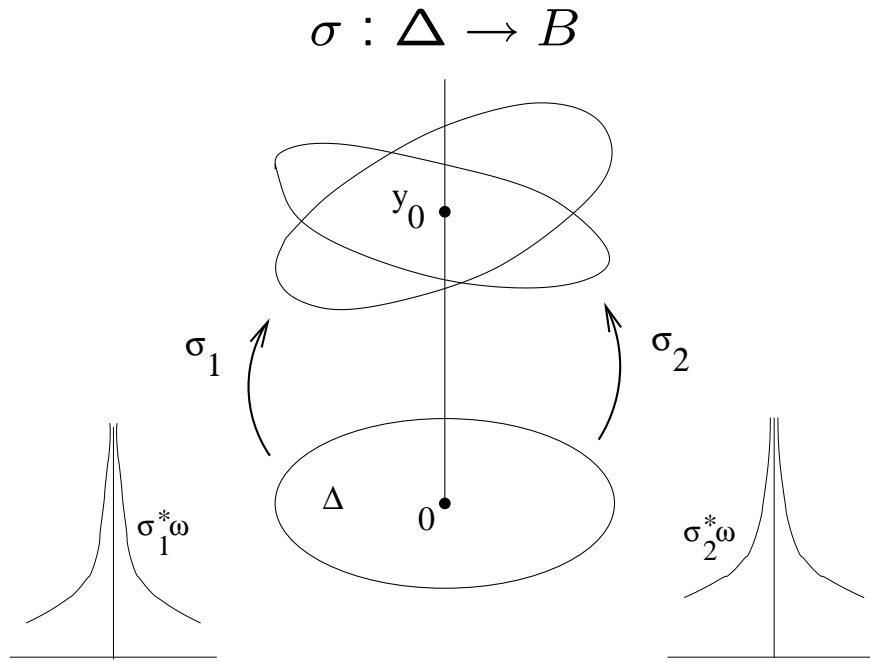
$$\top e^{-\frac{1}{z} \int_0^{-sz} \theta_{-t}(\beta) dt} = \top e^{\int_0^1 \alpha(u) du}$$

$\pi(u) = -szu$ pour $u \in [0, 1]$, $\alpha(u) du$ pullback
par π de $-\frac{1}{z} \theta_{-t}(\beta) dt$

$$\alpha(u) du = -\frac{1}{z} \theta_{szu}(\beta) (-sz) du = s \theta_{szu}(\beta) du$$

$$\top e^{-\frac{1}{z} \int_0^{-sz} \theta_{-t}(\beta) dt} = \top e^s \int_0^1 \theta_{szu}(\beta) du \rightarrow e^{s\beta}$$

Fibré principal B



Fibré principal B , de groupe $\mathbb{G}_m = \mathbb{C}^*$

$$\mathbb{G}_m \rightarrow B \xrightarrow{\pi} \Delta$$

$$V = \pi^{-1}(\{0\}) \subset B,$$

$$B^* = B \setminus V \subset B.$$

$$P = B \times G$$

$$u(b, g) = (u(b), u^Y(g)), \quad \forall u \in \mathbb{G}_m$$

$\gamma(z, u) \in G(\mathbb{C})$ invariante ssi

$$\gamma(z, u) = u^Y \gamma(z, 1)$$

Deux dérivées de γ ,

$$\gamma(z, u)^{-1} \frac{d}{dz} \gamma(z, u) = u^Y(a(z)),$$

$$a(z) = \gamma(z, 1)^{-1} \frac{d}{dz} \gamma(z, 1)$$

$$\gamma(z, u)^{-1} u \frac{d}{du} \gamma(z, u) = u^Y(b(z)),$$

$$b(z) = \gamma(z, 1)^{-1} Y(\gamma(z, 1))$$

Connection plate équisingulière

$$\varpi = A(z, v) dz + B(z, v) \frac{dv}{v},$$

$$\text{Invariance } \varpi(z, uv) = u^Y(\varpi(z, v))$$

$$\varpi(z, u) = u^Y(a(z)) dz + u^Y(b(z)) \frac{du}{u},$$

$$\frac{db}{dz} - Y(a) + [a, b] = 0.$$

Lemme

ϖ se prolonge à $\Delta^* \times \mathbb{C}$

restriction de ϖ à $\Delta^* \times \{0\}$ est nulle

Monodromies et point base

$$M_{\{z_0\} \times \mathbb{C}^*}(\varpi) = 1$$

$$M_{\Delta^* \times \{u\}}(\varpi) = 1$$

Solution à point base $\Delta^* \times \{0\}$

$$\gamma(z, v) = \mathbb{T} e^{\int_0^v u^Y(b(z)) \frac{du}{u}}$$

Invariante (car le choix du point base est invariant)

$$\gamma(z) = \gamma(z, v)|_{v=1}$$

$$\gamma(z)^{-1} d\gamma(z) = a(z) dz \quad \text{et} \quad \gamma(z)^{-1} Y \gamma(z) = b(z)$$

Connexion plate équisingulière

$$\begin{aligned} \text{Nouvelle section } \sigma_s(z) &= (z, e^{sz}) \rightarrow \\ \gamma_s(z) &= \theta_{sz}(\gamma(z)) \end{aligned}$$

équisingularité $\Rightarrow \gamma_s$ et γ ont le même γ_-

\Downarrow

$$\gamma(z) = \mathbb{T} e^{-\frac{1}{z} \int_{\infty}^0 \theta_{-t}(\beta) dt} \gamma_{\text{reg}}(z),$$

$$v^Y \left(\mathbb{T} e^{-\frac{1}{z} \int_{\infty}^0 \theta_{-t}(\beta) dt} \right) = \mathbb{T} e^{-\frac{1}{z} \int_0^v u^Y(\beta) \frac{du}{u}}$$

$$\gamma(z, v) = \left(\mathbb{T} e^{-\frac{1}{z} \int_0^v u^Y(\beta) \frac{du}{u}} \right) v^Y(\gamma_{\text{reg}}(z))$$

$$\gamma(z, v) = \mathbb{T} e^{-\frac{1}{z}} \int_0^v u^Y(\beta) \frac{du}{u}$$

$D\gamma$ équisingulière

nouvelle section $v(z)\sigma(z)$, $v(0) = 1$

$$\gamma_v(z) = \mathbb{T} e^{-\frac{1}{z}} \int_0^{v(z)} u^Y(\beta) \frac{du}{u}$$

$$\gamma_v(z) = \left(\mathbb{T} e^{-\frac{1}{z}} \int_0^1 u^Y(\beta) \frac{du}{u} \right) \left(\mathbb{T} e^{-\frac{1}{z}} \int_1^{v(z)} u^Y(\beta) \frac{du}{u} \right)$$

$$s \rightarrow 1 + s(v(z) - 1) = u,$$

$$(1 + s(v(z) - 1))^{n-1} \beta_n \frac{1 - v(z)}{z} ds$$

Classification des connexions

Deux connexions ϖ et ϖ' sur P^* sont équivalentes ssi

$$\varpi' = Dh + h^{-1}\varpi h,$$

avec h une application \mathbb{G}_m -invariante à valeurs dans G régulière sur B

Grace au point base $\Delta^* \times \{0\}$ on a

$$\gamma'(z, v) = \gamma(z, v) h(z, v)$$

Pour toute ϖ plate équivariante il existe un unique $\beta \in \text{Lie } G(\mathbb{C})$ tel que $\varpi \sim D\gamma$ où

$$\gamma(z, v) = \text{T}e^{-\frac{1}{z} \int_0^v u^Y(\beta) \frac{du}{u}}$$

“La parenté de plus en plus manifeste entre le groupe de Grothendieck–Teichmüller d’une part, et le groupe de renormalisation de la Théorie Quantique des Champs n’est sans doute que la première manifestation d’un groupe de symétrie des constantes fondamentales de la physique, une espèce de groupe de Galois cosmique !”

Pierre Cartier

P. Cartier, *Grothendieck et les motifs*, IHES/M/00/75.

A. Connes, D. Kreimer, *Renormalization in quantum field theory and the Riemann-Hilbert problem. II. The β -function, diffeomorphisms and the renormalization group*. Comm. Math. Phys. 216 (2001), no. 1, 215–241.

A. Connes, M. Marcolli, *Renormalization and motivic Galois theory*, International Math. Research Notices, (2004), no. 76, 4073–4091.

A. Connes, M. Marcolli, *From Physics to Number theory via Noncommutative Geometry, II : Renormalization, the Riemann–Hilbert correspondence, and motivic Galois theory*, to appear in “Frontiers in Number Theory, Physics, and Geometry” Vol.II. Preprint hep-th/0411114.

D. Gross, *Applications of the renormalization group to high energy physics*, Les Houches 1975, Proceedings, Methods In Field Theory, Amsterdam, (1976), 141–250.

Transparents du septième cours

- **Connections équivariantes et fibrés principaux**
- **Fibrés équivariants et groupe Cosmique**
- **Action sur les constantes de couplage**
- **Galois différentiel**
- **Formalisme Tannakien**
- **Groupe de Galois $\text{Gal}(\mathcal{T})$ d'une théorie \mathcal{T}**

Fibrés principaux

H agit à droite

$$\pi : P \rightarrow B, \quad P \times H \rightarrow P, \quad (\xi, h) \rightarrow R_h(\xi) = \xi h$$

connection : 1-forme α sur P à valeurs dans \mathfrak{h}

$$\alpha/\pi^{-1}(b) = h^{-1}dh, \quad R_a^*(\alpha) = (\text{Ad } a^{-1})(\alpha)$$

$$\text{section } \xi \rightarrow \varpi = \nabla(\xi) = \xi^*(\alpha)$$

$$\nabla(\xi k) = k^{-1} dk + k^{-1} \nabla(\xi) k$$

La section $\eta = \xi h^{-1}$ vérifie $\nabla\eta = 0$ ssi

$$h^{-1} dh = \varpi$$

Fibrés principaux équivariants

Fibré trivial

$$P = B \times H, \quad R_a(b, h) = (b, ha)$$

$H_1 \subset H$ sous-groupe fermé

1) Le fibré H -principal P est H_1 -équivariant avec

$$h_1(b, h) = (h_1 b, h_1 h)$$

2) Soit ∇ une connection sur P et $\varpi = \nabla(\xi)$ où $\xi(b) = (b, 1)$. Pour tout $h_1 \in H_1$ le pull back ∇' de ∇ par l'action de h_1 sur P vérifie

$$\varpi' = \nabla'(\xi) = h_1^{-1} h_1^*(\varpi) h_1$$

Soit α la 1-forme de la connection ∇ et $h_1 \in H_1$. Par construction la 1-forme α' du pull back ∇' est le pull back de α par la multiplication L à gauche $L(b, h) = (h_1 b, h_1 h)$ d'où

$$\nabla'(\xi) = \xi^*(\alpha') = \xi^*(L^*(\alpha)) = (L \circ \xi)^*(\alpha)$$

On a

$$L \circ \xi(b) = (h_1 b, h_1) = R_{h_1} \xi(h_1 b), \quad \forall b \in B$$

et $R_{h_1}^*(\alpha) = (\text{Ad } h_1^{-1})(\alpha)$

d'où

$$\varpi' = \nabla'(\xi) = h_1^{-1} h_1^*(\varpi) h_1$$

Connections H_1 -invariantes

1) Une connection ∇ sur P est H_1 -invariante ssi $\varpi = \nabla\xi$ vérifie

$$h_1^*(\varpi) = h_1 \varpi h_1^{-1}, \quad \forall h_1 \in H_1.$$

2) Soit $\gamma, B \rightarrow H$ telle que

$$\gamma(h_1 b) = h_1 \gamma(b) h_1^{-1}, \quad \forall h_1 \in H_1,$$

alors la transformation de jauge

$$\nabla \rightarrow \nabla' = \nabla \circ L_\gamma$$

$$\varpi \rightarrow \varpi' = \gamma^{-1} d\gamma + \gamma^{-1} \varpi \gamma$$

préserve la H_1 -invariance des connections.

$\mathbb{G}_m \rightarrow B \xrightarrow{\pi} \Delta$, \mathbb{G}_m -fibré sur Δ .

1) $\tilde{P} = B \times G^*$ est G^* -principal \mathbb{G}_m -équivariant

$$u(b, k) = (u b, u k)$$

2) $\xi(b) = (b, 1)$, $\nabla \rightarrow \nabla(\xi)$ est un isomorphisme entre connections à valeurs dans $\text{Lie } G$, \mathbb{G}_m -invariantes sur \tilde{P}^* et connections à valeurs dans $\text{Lie } G$ sur B^* vérifiant

$$\varpi(z, u(v)) = u^Y(\varpi(z, v)), \quad \forall u \in \mathbb{G}_m$$

3) Soit $\gamma, B \rightarrow G$ avec

$$\gamma(u b) = u^Y(\gamma(b)), \quad \forall u \in \mathbb{G}_m$$

$L_\gamma(b, k) = (b, \gamma(b) k)$ est un automorphisme du fibré \mathbb{G}_m -équivariant G^* -principal \tilde{P} .

4) L'équivalence des connections par L_γ correspond à

$$\varpi' = D\gamma + \gamma^{-1}\varpi\gamma,$$

$$\epsilon : G^* = G \rtimes \mathbb{G}_m \rightarrow \mathbb{G}_m$$

Soit $\epsilon(\tilde{P})$ le fibré \mathbb{G}_m -principal \mathbb{G}_m -équivariant image de \tilde{P} et $\tilde{\epsilon} : \tilde{P} \rightarrow \epsilon(\tilde{P})$,

1) Une connection ∇ sur \tilde{P}^* est à valeurs dans $\text{Lie } G$ ssi $\epsilon(\nabla) = d$.

2) Un automorphisme du fibré \mathbb{G}_m -équivariant G^* -principal \tilde{P} est donné par un $\gamma, B \rightarrow G$

$$\gamma(ub) = u \gamma(b) u^{-1}, \quad \forall u \in \mathbb{G}_m$$

ssi il induit l'identité sur $\epsilon(\tilde{P})$.

Extension à $\underline{B} = B \times_{\mathbb{G}_m} \mathbb{G}_a$

$$B_0 = B \times_{\mathbb{G}_m} \{0\} \subset \underline{B} = B \times_{\mathbb{G}_m} \mathbb{G}_a$$

- 1) Le fibré \tilde{P} se prolonge canoniquement en un fibré \mathbb{G}_m -équivariant G^* -principal $\underline{\tilde{P}}$ sur \underline{B} .
- 2) Toute connection invariante ∇ sur \tilde{P}^* avec $\epsilon(\nabla) = d$ se prolonge canoniquement en une connection invariante $\underline{\nabla}$ sur $\underline{\tilde{P}}^*$. Sa restriction à B_0 est la connection triviale d .
- 3) Tout automorphisme du fibré \mathbb{G}_m -équivariant G^* -principal \tilde{P} qui induit l'identité sur $\epsilon(\tilde{P})$ se prolonge à $\underline{\tilde{P}}$ et sa restriction à B_0 est l'identité.

Connexion plate équivariante

Une connexion plate ∇ sur \tilde{P}^* avec $\epsilon(\nabla) = d$ est équivariante ssi pour toute section plate $\nabla \eta = 0$ l'unique isomorphisme donné par la trivialisation η entre les restrictions de \tilde{P}^* aux sections $\sigma : \Delta \rightarrow B$ avec $\sigma(0) = y_0$ est régulier sur Δ .

Théorème

Soit ∇ une connexion plate, équivariante avec $\epsilon(\nabla) = d$. Il existe un unique $\beta \in \text{Lie}G$ et un automorphisme ρ du fibré \mathbb{G}_m -équivariant G^* -principal \tilde{P} qui induit l'identité sur $\epsilon(\tilde{P})$ tels que

$$\nabla \rho(\gamma^{-1}) = 0, \quad \gamma(z, v) = \text{T}e^{-\frac{1}{z} \int_0^v u^Y(\beta) \frac{du}{u}}$$

Soit $\varpi = \nabla(\xi)$. Une solution $\gamma(z, v) \in G$ de

$$D\gamma = \varpi$$

donne une section plate $\eta(b) = (b, \gamma^{-1}(b))$ de \tilde{P}^* . Soient $\sigma_j : \Delta \rightarrow B$ avec $\sigma_j(0) = y_0$. L'isomorphisme entre $\sigma_j^* \tilde{P}^*$ associé à la trivialisaton η est donné par L_k avec $z \rightarrow k(z) \in G^*$ et

$$k(z) \gamma^{-1}(\sigma_1(z)) = \gamma^{-1}(\sigma_2(z)), \quad \forall z \in \Delta^*$$

On a donc

$$k = \sigma_2^*(\gamma)^{-1} \sigma_1^*(\gamma)$$

et k est régulier ssi les $\sigma_j^*(\gamma)$ ont la même singularité.

W -connections

Soit (E, W) un fibré vectoriel filtré de base B

$$W^{-n-1}(E) \subset W^{-n}(E)$$

avec une trivialisatation des gradués associés

$$Gr_n^W(E) = W^{-n}(E)/W^{-n-1}(E).$$

Une W -connection sur E est une connection ∇ sur $E^* = E|_{B^*}$, telle que

1. La connection ∇ est compatible avec la filtration, *i.e.* préserve les $W^{-n}(E^*)$.
2. La connection ∇ induit la connection triviale sur $Gr^W(E)$.

Deux W -connections ∇_i sur E^* sont W -équivalentes ssi il existe un automorphisme h de E , préservant la filtration, induisant l'identité sur $Gr^W(E)$ et vérifiant $h \circ \nabla_1 = \nabla_2 \circ h$.

W -connection équisingulière

V espace vectoriel \mathbb{Z} -gradué $V = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} V_n$, fibré trivial $E = B \times V$, \mathbb{G}_m -équivariant (par l'action de la graduation) et filtré par W

$$W^{-n}(V) = \bigoplus_{m \geq n} V_m$$

Une W -connection ∇ sur E est équisingulière ssi elle est plate, \mathbb{G}_m -invariante et pour tout système fondamental de solutions de $\nabla \xi = 0$ l'isomorphisme associé des restrictions de E aux sections $\sigma : \Delta \rightarrow B$ avec $\sigma(0) = y_0$ est régulier.

La catégorie \mathcal{E} des fibrés plats équivariants

Objets : $Obj(\mathcal{E})$

couples $\Theta = [V, \nabla]$, avec V espace vectoriel \mathbb{Z} -gradué et ∇ une W -connection équivariante sur $E^* = B^* \times V$. $[V, \nabla]$ est la classe de W -équivalence.

Morphismes : $\text{Hom}_{\mathcal{E}}(\Theta, \Theta')$

application linéaire $T : V \rightarrow V'$ compatible avec la graduation

$$\nabla_2 = \begin{pmatrix} \nabla' & T \nabla - \nabla' T \\ 0 & \nabla \end{pmatrix} \sim \nabla_1 = \begin{pmatrix} \nabla' & 0 \\ 0 & \nabla \end{pmatrix} .$$

Produit tensoriel

$$(E, \nabla) \otimes (E', \nabla') = (E \otimes E', \nabla \otimes 1 + 1 \otimes \nabla')$$

Algèbre de Lie $\mathcal{L}_{\mathbb{U}}$ et le groupe \mathbb{U}^*

Soit $\mathcal{L}_{\mathbb{U}} = \mathcal{F}(1, 2, 3, \dots)_{\bullet}$ l'algèbre de Lie libre engendrée par les éléments e_{-n} de degré n , $n > 0$. L'algèbre de Hopf

$$\mathcal{H}_{\mathbb{U}} := U(\mathcal{F}(1, 2, 3, \dots)_{\bullet})^{\vee},$$

duale graduée de l'algèbre enveloppante $\mathcal{L}_{\mathbb{U}}$. On note \mathbb{U} le schéma en groupes affine associé à $\mathcal{H}_{\mathbb{U}}$, et par \mathbb{U}^* le produit semidirect $\mathbb{U}^* = \mathbb{U} \rtimes \mathbb{G}_m$, avec l'action donnée par la graduation.

Théorème

Soit \mathcal{E} la catégorie des fibrés plats équisinguliers. Soit $\omega : \mathcal{E} \rightarrow \text{Vect}_{\mathbb{C}}$ le foncteur $\omega(\Theta) = V$, pour $\Theta = [V, \nabla]$. Alors \mathcal{E} est une catégorie Tannakienne neutre, ω est un foncteur fibre et \mathcal{E} est équivalente à la catégorie des représentations $\text{Rep}_{\mathbb{U}^*}$ du schéma en groupes affine \mathbb{U}^* .

Soit V un espace vectoriel gradué de dimension finie sur k . Soit G le groupe algébrique unipotent défini par les conditions

$$S W_{-n}(V) = W_{-n}(V),$$

où $W^{-n}(V) = \bigoplus_{m \geq n} V_m$, et

$$S|_{Gr_n} = 1,$$

où Gr_n est le gradué associé.

W -connection plate équisingulière sur $E^* = B^* \times V$



connection plate équisingulière sur \tilde{P}^*

Repère Singulier Universel

$$\gamma_U(z, v) = \mathbb{T} e^{-\frac{1}{z} \int_0^v u^Y(e) \frac{du}{u}} \in U$$

$$\gamma_U(-z, v) = \sum_{n \geq 0} \sum_{k_j > 0}$$

$$\frac{e(-k_1)e(-k_2) \cdots e(-k_n)}{k_1 (k_1 + k_2) \cdots (k_1 + k_2 + \cdots + k_n)} v^{\sum k_j} z^{-n}$$

Soit $\Theta = (V, \nabla)$ un objet de \mathcal{E} . Il existe une unique représentation $\rho = \rho_\Theta$ de U^* dans V , telle que la restriction de ρ à \mathbb{G}_m soit la graduation de V et

$$D\rho(\gamma_U) \simeq \nabla,$$

où γ_U est le repère singulier universel.

Soit ρ une représentation de U^* dans V , il existe un unique objet de \mathcal{E} qui lui corresponde.

Morphismes

Soit (V, ∇) un objet de \mathcal{E} .

1. Pour tout $S \in \text{Aut}(V)$ compatible à la graduation, $S \nabla S^{-1}$ est une connection plate équivariante.
2. $\rho_{(E, S \nabla S^{-1})} = S \rho_{(E, \nabla)} S^{-1}$.
3. $S \nabla S^{-1} \sim \nabla \Leftrightarrow [\rho_{(E, \nabla)}, S] = 0$.

$$T \in \text{Hom}(\Theta, \Theta') \Leftrightarrow T \rho_{\Theta} = \rho_{\Theta'} T$$

$$S = \begin{pmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Remarque

$$U^* \sim G_{\mathcal{M}_T}(\mathcal{O}), \quad \mathcal{O} = \mathbb{Z}[i]\left[\frac{1}{2}\right]$$

Groupe de Galois motivique (motifs de Tate mixtes) du schéma S_4 des entiers cyclotomiques mais cet isomorphisme n'est pas canonique

$$\alpha(z)dz = \sum_{a \in \mu_N \cup \{0\}} \frac{dz}{z-a} e_a$$

Coefficient de $(-1)^m e_{\zeta_1} e_0^{k_1-1} e_{\zeta_2} e_0^{k_2-1} \dots e_{\zeta_m} e_0^{k_m-1}$
dans

$$\gamma = \text{Te} \int_0^1 \alpha(z) dz$$

est

$$\text{Li}_{k_1, \dots, k_m}(z_1, z_2, \dots, z_m) \\ \sum_{0 < n_1 < n_2 < \dots < n_m} \frac{z_1^{n_1} z_2^{n_2} \dots z_m^{n_m}}{n_1^{k_1} n_2^{k_2} \dots n_m^{k_m}}$$

Difféographismes et Difféomorphismes

$$\left(g + \sum_{\substack{\Gamma \\ \text{---}\bullet}} g^{2\ell+1} \frac{\Gamma}{S(\Gamma)} \right) \left(1 - \sum_{\substack{\Gamma \\ \text{---}\bullet}} g^{2\ell} \frac{\Gamma}{S(\Gamma)} \right)^{-3/2}$$

Théorème (ac+dk)

$$\text{Difg}(\varphi_6^3) \xrightarrow{\rho} \text{Diff}_{\mathbb{C}}$$

Groupe de Galois Cosmique (ac + mm)

Conjecturé par Cartier (“La folle journée”)

$$\mathcal{H}_c = \mathcal{U}(\mathcal{F}(3, 5, 7, \dots)_{\bullet})^{\vee}$$

(Valeurs zêta multiples + (ac + dk))

U groupe de symétrie des théories renormalisables

$$\mathcal{H} = \mathcal{U}(\mathcal{F}(1, 2, 3, \dots)_{\bullet})^{\vee}$$

$$U \longrightarrow \text{Difg}(\mathcal{T}) \xrightarrow{\rho} \text{Diff}$$

Groupe de renormalisation $\mathbb{G}_a \rightarrow U$

Extension de Picard-Vessiot

(K, δ) corps différentiel, (M, ∇) module différentiel

$$\nabla(am) = \delta(a)m + a\nabla m$$

$$M = K^n, \quad \nabla = d + A$$

- R est une k -algèbre différentielle
- R n'a pas d'idéal différentiel non-trivial
- $\exists F \in \mathrm{GL}_n(R)$, $\delta(F) + AF = 0$
- R engendré par les coefficients de F

R existe et est unique à \sim près, pas de diviseur de zéros \rightarrow corps des fractions L

Deux exemples

Soit $a \in K$, $a \notin \text{Im}\delta$ alors adjoindre la primitive de a donne le système

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -a \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

Extension de Picard-Vessiot E est le corps $E = K \langle f \rangle$ des fractions de $R = K[f]$ où f est la primitive de a . Le groupe de Galois est $G(E/K) = \mathbb{G}_a(\mathbb{C})$ agissant par $f \rightarrow f + c$.

Soit $a \in K$,

$$\delta(u) = au$$

Soit $R = K[u, u^{-1}]$ avec u solution formelle. Si R n'a pas d'idéal différentiel alors R c'est l'extension de Picard-Vessiot et E le corps des fractions. Le groupe de Galois est $G(E/K) = \mathbb{G}_m(\mathbb{C})$ par $u \rightarrow \lambda u$.

Galois Différentiel $\text{Gal}_K(D) = \text{Aut}_K(R, d)$

$$G \rightarrow \text{Aut}(V), \quad V = \{\xi : \xi' + A\xi = 0\}$$

$\text{Gal}_K(D)$ est un groupe algébrique

sous-corps différentiel de $L \leftrightarrow$ sous-groupe algébrique

Théorème

Les conditions suivantes sur une équation D sont équivalentes :

- (i) L'équation est résoluble par les étapes
 - Adjonction de primitives
 - Adjonction d'exponentielles de primitives
 - Extensions algébriques finies
- (ii) Le groupe de Galois différentiel est résoluble

Equation régulière D modulo jauge	Représentation de π_1 dans $GL_n(\mathbb{C})$
$\text{Gal}_K(D)$	Zariski de $\text{Im } \pi_1$
Equation D modulo jauge	Représentation de π_1^{wild} dans $GL_n(\mathbb{C})$
$\text{Gal}_K(D)$	Zariski de $\text{Im } \pi_1^{wild}$

Formalisme Tannakien

Catégorie Abélienne \mathcal{C} :

Exemple : la catégorie des espaces vectoriels filtrés n'est pas abélienne, car pour $f : E \rightarrow F$ on n'a pas

$$E/\text{Ker } f \sim \text{Im } f \subset F$$

(filtration quotient \neq filtration induite)

\otimes -catégorie rigide \mathcal{C}

\otimes -catégorie \mathcal{C} : k -linéaire avec $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$

- $\exists 1 \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ avec $\text{End}(1) \cong k$ et isomorphismes fonctoriels

$$a_{X,Y,Z} : X \otimes (Y \otimes Z) \rightarrow (X \otimes Y) \otimes Z$$

$$c_{X,Y} : X \otimes Y \rightarrow Y \otimes X$$

$$l_X : X \otimes 1 \rightarrow X \quad \text{and} \quad r_X : 1 \otimes X \rightarrow X.$$

- Commutativité : $c_{Y,X} = c_{X,Y}^{-1}$

\otimes -catégorie rigide \mathcal{C} : dualité $\vee : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}^{op}$

- $\forall X \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ le foncteur $- \otimes X^\vee$ est adjoint à gauche de $- \otimes X$ et $X^\vee \otimes -$ adjoint à droite de $X \otimes -$.
- Morphisme d'évaluation $\epsilon : X \otimes X^\vee \rightarrow 1$ et unité $\delta : 1 \rightarrow X^\vee \otimes X$ avec $(\epsilon \otimes 1) \circ (1 \otimes \delta) = 1_X$ et $(1 \otimes \epsilon) \circ (\delta \otimes 1) = 1_{X^\vee}$.

Foncteurs $\omega : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$

fidèle : $\omega : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}'}(\omega(X), \omega(Y))$ injection

additif : $\omega : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}'}(\omega(X), \omega(Y))$ k -linéaire

exact : $0 \rightarrow X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow 0$ exact $\Rightarrow 0 \rightarrow \omega(X) \rightarrow \omega(Y) \rightarrow \omega(Z) \rightarrow 0$ exact

\otimes -foncteur : isomorphismes fonctoriels $\tau_1 : \omega(1) \rightarrow 1$ et $\tau_{X,Y} : \omega(X \otimes Y) \rightarrow \omega(X) \otimes \omega(Y)$

Foncteur fibre, catégories tannakiennes \mathcal{C} une \otimes -catégorie k -linéaire rigide : foncteur fibre $\omega : \mathcal{C} \rightarrow \text{Vect}_K$, \otimes -foncteur exact et fidèle, K extension de k .

\mathcal{C} tannakienne (= a un foncteur fibre), tannakienne neutre ($K = k$)

(Grothendieck, Savendra-Rivano, Deligne, ...)

\mathcal{C} tannakienne neutre $\Rightarrow \mathcal{C} \cong \text{Rep}_G$

$G = \underline{\text{Aut}}^{\otimes}(\omega)$ schéma en groupe affine $\text{Gal}(\mathcal{C})$

Correspondance de Riemann–Hilbert

Formalisme Tannakien appliqué aux catégories de systèmes différentiels

$(K, \delta) =$ corps différentiel

e.g. $K = \mathbb{C}\{z\}[z^{-1}]$ ou $K = \mathbb{C}((z))$

Catégorie \mathcal{D}_K des modules différentiels sur K :
Objets (V, ∇) , espace vectoriel sur K et connexion

\mathbb{C} -linéaire $\nabla : V \rightarrow V$ avec $\nabla(fv) = \delta(f)v + f\nabla(v)$, pour tout $f \in K$ et $v \in V$

Morphismes $\text{Hom}((V_1, \nabla_1), (V_2, \nabla_2))$ K -linéaires
 $T : V_1 \rightarrow V_2$ avec $\nabla_2 \circ T = T \circ \nabla_1$

$(V_1, \nabla_1) \otimes (V_2, \nabla_2) = (V_1 \otimes V_2, \nabla_1 \otimes 1 + 1 \otimes \nabla_2)$

et dual $(V, \nabla)^\vee$

Foncteur fibre $\omega(V, \nabla) = \text{Ker } \nabla$. Catégorie tannakienne neutre $\mathcal{D}_K \cong \text{Rep}_G$

Exemple : ODE $\delta(u) = Au$, sous-catégorie de $\mathcal{D}_K \Rightarrow$ groupe de Galois différentiel (Aut de Picard-Vessiot)

Exemple : régulier singulier $\text{Rep}_{\mathbb{Z}} \cong \text{Rep}_G$ schéma en groupe affine $G = \bar{\mathbb{Z}}$ dual de $\mathcal{H} = \mathbb{C}[e(q), t]$, pour $q \in \mathbb{C}/\mathbb{Z}$, avec $e(q_1 + q_2) = e(q_1)e(q_2)$ et coproduit $\Delta(e(q)) = e(q) \otimes e(q)$ et $\Delta(t) = t \otimes 1 + 1 \otimes t$.

Pour $K = \mathbb{C}((z))$, schéma en groupe affine $G = \mathcal{T} \rtimes \bar{\mathbb{Z}}$ tore exponentiel de Ramis $\mathcal{T} = \text{Hom}(\mathcal{B}, \mathbb{C}^*)$, $\mathcal{B} = \cup_{\nu \in \mathbb{N}} \mathcal{B}_\nu$, $\mathcal{B}_\nu = z^{-1/\nu} \mathbb{C}[z^{-1/\nu}]$.

Recalibrage des exponentielles (Galois)

$$e^{P(z^{-1/\nu})} \rightarrow \lambda e^{P(z^{-1/\nu})}$$

Pour $K = \mathbb{C}\{z\}[z^{-1}]$ nouveaux générateurs : phénomène de Stokes (resommation des séries divergentes, dérivations étrangères d'Ecalte)

Groupe de Galois $\text{Gal}(\mathcal{T})$ d'une théorie

Soit \mathcal{T} une QFT renormalisable. Son groupe de Galois $\text{Gal}(\mathcal{T})$ est le schéma en groupe affine associé à la sous-catégorie $\mathcal{E}_{\mathcal{T}}$ des fibrés plats équisinguliers venant de \mathcal{T} . (on rajoute les sous-quotients de $\oplus \otimes$)

Proposition

Soit \mathcal{T} une QFT renormalisable.

- 1) La théorie \mathcal{T} est finie ssi son groupe de Galois est trivial $\text{Gal}(\mathcal{T}) = \{1\}$.
- 2) Si \mathcal{T} est super-renormalisable, son groupe de Galois $\text{Gal}(\mathcal{T})$ est de dimension finie.

Exemples : ϕ_4^3 et $\phi_3^4 \rightarrow \text{Gal}(\mathcal{T}) = \mathbb{G}_a \rtimes \mathbb{G}_m$

P. Cartier, *Grothendieck et les motifs*, IHES/M/00/75.

A. Connes, D. Kreimer, *Renormalization in quantum field theory and the Riemann-Hilbert problem. II. The β -function, diffeomorphisms and the renormalization group*. Comm. Math. Phys. 216 (2001), no. 1, 215–241.

A. Connes, M. Marcolli, *Renormalization and motivic Galois theory*, International Math. Research Notices, (2004), no. 76, 4073–4091.

A. Connes, M. Marcolli, *From Physics to Number theory via Noncommutative Geometry, II : Renormalization, the Riemann–Hilbert correspondence, and motivic Galois theory*, to appear in “Frontiers in Number Theory, Physics, and Geometry” Vol.II. Preprint hep-th/0411114.